

Exercice I.

1°. Soit $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{\sin x}{x}}$. Donner le D.L. de $f'(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 (On distinguera les cas $x > 0$ et $x < 0$). En déduire celui de f à l'ordre 3.

2°. Trouver l'équivalent de $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 8\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} + 9\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} - 1$ au voisinage de l'infini.

Problème:

1°. Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ (i.e. 2 fois continuellement dérivable) vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Soit x un élément de $[a, b]$, montrer qu'il existe un y de $]a, b[$ tel que:

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(y).$$

(Prendre $\varphi(t) = f(t) - \frac{f}{2}(t-a)(t-b)$ et exprimer que $\varphi(x) = 0$).

2°. On supposera toujours f de classe C^2 sur $[a, b]$ dans la suite du problème. On pose $M = \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ et on suppose $M > 0$ (i.e. f n'est pas une fonction affine).

D'autre part, dans cette question ainsi qu'au 3°, 4° et 5°, on vérifie: $f(a) = f(b) = 0$.

Montrer que: $\forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq \frac{M(x-a)(b-x)}{2}$

puis, en déduire: $|f'(a)| \leq \frac{M(b-a)}{2}$ et $|f'(b)| \leq \frac{M(b-a)}{2}$.

3°. En étudiant les variations de $g(x) = f(x) - \frac{M(x-a)(x-b)}{2}$ et en utilisant les résultats du 2°, montrer que, si $\exists x_0 \in]a, b[$ tel que: $f(x_0) = \frac{M(x_0-a)(x_0-b)}{2}$, alors: $f(x) = \frac{M(x-a)(x-b)}{2}$.

Qu'obtiendrait-on si on avait: $f(x_0) = -\frac{M(x_0-a)(x_0-b)}{2}$?

4°. Montrer que si $f'(a) = -\frac{M(b-a)}{2}$ alors $f(x) = \frac{M(x-a)(x-b)}{2}$.

(Procéder de la même manière qu'au 3^{ème} question: avec $g'(a) = 0$ et $g''(x) \leq 0 \Rightarrow g'(x) \leq 0$: alors, si $\exists c \in]a, b[: f''(c) < M - \frac{M}{2}$ montrer que l'on a forcément: $g(b) < 0$ (ce qui est impossible). (Faire un tableau de variation!).)

5°. On veut montrer que: $\forall x \in [a, b],$ on a: $|f'(x)| \leq \frac{M(b-a)}{2}$.

Appliquer les résultats du 2° à $f_1(t) = f(t) - \frac{f(x)(t-a)}{x-a}$ sur $[a, x]$

pour montrer que $f'(x) \leq M \cdot \frac{x-a}{2} + \frac{f(x)}{x-a}$. En déduire que $f'(x) \leq M \frac{b-a}{2}$

Démontrer ensuite que $f'(x) \geq -M \frac{(b-a)}{2}$.