

Exercice I

1°) On a: $f(x) = -\frac{(\frac{ax^2}{2})^2}{2\sqrt{\frac{ax^2}{2}}\sqrt{1-\frac{ax^2}{2}}} = \frac{-A}{2B.C}$

$\frac{ax^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4) \Rightarrow A = -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{50} + o(x^3)$

$\frac{1}{B} = (1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$ or

$\frac{1}{C} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4)}} = \frac{\sqrt{6}}{|x|} (1 - \frac{x^2}{20} + o(x^2))^{-1/2} = \frac{\sqrt{6}}{|x|} (1 + \frac{x^2}{40} + o(x^2))$

D'où: $f'(x) = \frac{5}{\sqrt{6}} (1 + \frac{x^2}{120} + o(x^2))$ (ε du signe de x).

donc: $f(x) = \frac{5}{\sqrt{6}} (x + \frac{x^3}{360} + o(x^3))$.

2°) $(1 + \frac{1}{x})^x = e^{x \log(1 + \frac{1}{x})}$ or $x \log(1 + \frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{4x^3} + o(\frac{1}{x^3})$.

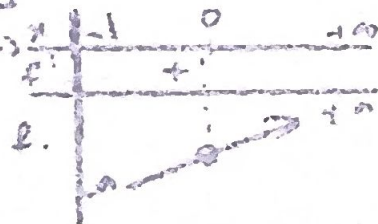
donc $(1 + \frac{1}{x})^x = e (1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2} - \frac{7}{16x^3} + o(\frac{1}{x^3}))$.

et $-8(1 + \frac{1}{2x})^{2x} = e(-8 + \frac{8}{x} - \frac{22}{24x^2} + \frac{7}{16x^3} + o(\frac{1}{x^3}))$ (on pose $u = 2x$).

$+9(1 + \frac{1}{3x})^{3x} = e(9 - \frac{9}{x} + \frac{11}{24x^2} - \frac{7}{48x^3} + o(\frac{1}{x^3}))$.

$= -2$
 $= -\frac{72}{48x^3} + o(\frac{1}{x^3})$.

Exercice II: $y = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}$



2°) cf. dessin.

On a: $x_2 = ay^2 + by + c$

et $y = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}$. x_1 et x_2 et y ds.
et on veut $x_2 \sim x_1$ car p^y .
 $\Rightarrow x_2 \sim x_1$.

d'où $x_2 = a \frac{2x_1^2}{\sqrt{1+x_1}} + b \frac{x_1\sqrt{2}}{\sqrt{1+x_1}} + c$. si $a \neq 0$: $x_2 \sim 2ax_1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

si $b \neq 0$, $a = \frac{1}{2}$: $x_2 \sim x_1$ by à écarter, donc: $b = 0$.
si $c \neq 0$: $x_2 \sim x_1$ car $1+c$ donc, nécessairement: $c = 0$.

$x_2 = \frac{1}{2}y^2 + 1$.
et $x_2 \sim x_1 \sim \frac{1}{x_1} \sim \frac{1}{y^2}$.

Problème: 1°) Cf. cours (interpolation).

2°) On a: $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi) \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{(x-a)(b-x)}{2} |f''(\xi)| \leq \frac{(x-a)(b-x)}{2} M$.

et $|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}| = |\frac{f(a)}{a-a}| \leq \frac{b-a}{2} M$. l'inégalité se conserve à la limite, donc,

$|f'(a)| \leq M \cdot \frac{b-a}{2}$; on procéderait de même pour $|f'(b)| \leq M \cdot \frac{b-a}{2}$.

