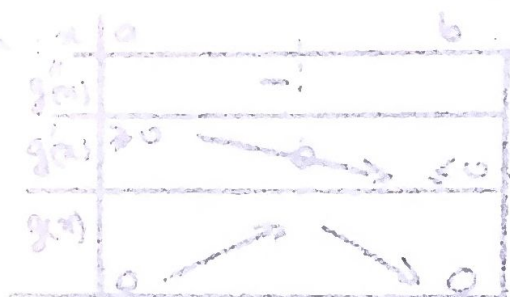


3°) Indiquer les variations de g . $g'(a) = f'(a) - M \leq 0$; $g'(b) = f'(b) + M \cdot \frac{b-a}{2} \geq 0$ d'où g' est



Si: $\exists x_0 \in]a, b[$: $g(x_0) = 0$, alors:

nécessairement: sur $[a, x_0]$: $g(x) = 0$ et $g'(x) = 0$; comme g' est décroissante, alors, $\forall x > x_0$: $g'(x) \leq 0$, donc, sur $[x_0, b]$ g est décroissante de 0 à 0 (!) donc, g est identiquement nulle sur $[a, b]$; ce qui signifie: $f(x) = M \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{2}$.

Si on avait: $f(x_0) = -M \cdot \frac{(x_0-a)(x_0-b)}{2}$ on ferait de même avec $g = f + \frac{M(x-a)(x-b)}{2}$.

4°). En reprenant le tableau de variation du 3°, si $g'(a) = 0$, alors, $\forall x \in [a, b]$: $g'(x) \leq 0$ (g' décroissante). Si $\exists c \in [a, b[$: $f''(c) < M - h$, alors, sur un voisinage de c , g'' est strictement négative, donc, g' est strictement décroissante et par conséquent: g' est strictement négative sur $[c, b]$, on aurait alors $g(b) < 0$ ce qui est impossible, donc, $\forall c \in [a, b]$: $f''(c) = M$.

$\Rightarrow g''(x) = 0$ avec $g(a) = g(b) = 0 \Rightarrow g \equiv 0$ et on a bien le résultat demandé.

5°). On a: $f'_x(a) = f'_x(x) = 0$ ou $f''_x(x) = f''(x)$. donc: $f'_x(x) \leq M \cdot \frac{x-a}{2}$; c'est à dire:

$$f'(x) \leq M \cdot \frac{x-a}{2} + \frac{f(x)}{x-a} \text{ mais, } f(x) \leq M \cdot \frac{(x-a)(b-x)}{2} \text{ donc:}$$

$$f'(x) \leq M \cdot \frac{x-a}{2} + M \cdot \frac{b-x}{2} = M \cdot \frac{b-a}{2}.$$

Pour avoir $f'(x) \geq -M \cdot \frac{b-a}{2}$, on ferait de même.

6°). L est le polynôme de Lagrange: $L(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$.

On peut appliquer les résultats démontrés à $F(x)$ car $f''(x) = f''(x)$.

$$\text{d'où a) } -\frac{M(x-a)(b-x)}{2} \leq f(x) - L(x) \leq \frac{M(x-a)(b-x)}{2}$$

$$\Rightarrow T_1(x) = L(x) - \frac{M(x-a)(b-x)}{2} \text{ et } T_2(x) = L(x) + \frac{M(x-a)(b-x)}{2}.$$

(On a bien $T_1''(x) = M$ et $T_2''(x) = -M$).

$$\text{b). en utilisant le 3°) alors: } F(x_0) = -\frac{M(x_0-a)(b-x_0)}{2}.$$

$$\text{donc, on a: } F(x) = -\frac{M(x-a)(b-x)}{2} \text{ i.e. } f(x) = T_1(x).$$

$$\text{c). On a: } -\frac{M(b-a)}{2} \leq f'(x) \leq \frac{M(b-a)}{2}.$$

$$\text{donc: } -\frac{M(b-a)}{2} + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(x) \leq \frac{M(b-a)}{2} + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$