

Problème I :

α et β étant des complexes, on pose :

1°. Déterminer la relation entre α et β pour que : $A^t A = I_4$.

On suppose que cette relation sera vérifiée par la suite.

2°. On considère la matrice

Montrer que $B^2 = (\alpha^2 - 1) \cdot I_4$.

3°. Montrer que :

$A^n = P_n(\alpha) \cdot I_4 + Q_n(\alpha) \cdot B$ où P_n et Q_n sont des polynômes dont on donnera une expression.

Montrer que P_n et Q_n vérifie : $P_n^2(\alpha) + (1 - \alpha^2) Q_n^2(\alpha) = 1$.

Exprimer $P_n(\frac{1}{2})$ et $Q_n(\frac{1}{2})$ à l'aide des fonctions circulaires de multiples de $\frac{\pi}{3}$.

4°. Calculer en fonction de α les nombres complexes λ qui annulent le déterminant de $(A - \lambda I_4)(A^t - \lambda I_4)$; déterminer, pour ces valeurs de λ , le rang de $A - \lambda I_4$.

Problème II :

1°. On note E_k le sous-ensemble de $M_n(K)$ contenant toutes les matrices dont les k premières colonnes sont identiques à celles de I_n .

a). Montrer que E_k est stable pour la multiplication matricielle.

b). Montrer que si $M \in E_k$ et si M^{-1} existe : $M^{-1} \in E_k$.

c). Si $A \in M_n(K)$, on désigne par A_k la matrice obtenue en remplaçant les k premières colonnes de A par les colonnes correspondantes de I_n .

Montrer que si $A \in M_n(K)$ et si $U \in E_k$, on a : $(U \cdot A)_k = U \cdot A_k$.

A.R. on a aussi : $(A \cdot U)_k = A_k \cdot U$?

2°. E'_k est le sous-ensemble des matrices de $M_n(K)$ obtenues en remplaçant la k ième colonne de I_n par une colonne quelconque.

a) Montrer que E'_k est stable pour la multiplication matricielle.

b) Dans quel cas une matrice de E'_k est-elle inversible ? Montrer alors que son inverse appartient à E'_k .

c). Si $V \in E'_k$, trouver les solutions de (1) : $\det(V - \lambda I_n) = 0$. Si λ est solution de (1) et si $\lambda \neq 1$, trouver les matrices unicolumnes X telles que $V \cdot X = \lambda X$.