

Problème III :

Soit $d \in \mathbb{C}^*$, on pose : $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis, pour $q \in \mathbb{C}$, on pose :
 $L(q) = \frac{1}{3d^2} (q^2 K^2 + dqK + d^2)$ et $L_1 = L(1)$; $L_2 = L(j^2)$; $L_3 = L(j)$.

1°. Calculer $L_1 + L_2 + L_3$ et K^3 .

2°. Donner les produits $L_R L_q$ pour $(R, q) \in [1, 3]^2$.

3°. Les matrices L_1, L_2 et L_3 sont-elles linéairement indépendantes ?

4°. En décomposant K et K^2 sur L_1, L_2 et L_3 , donner une autre démonstration du 2°).

5°. Soit $(a, b, c, q) \in \mathbb{C}^4$ et toujours $d \neq 0$, on pose : $M(q) = \begin{pmatrix} a & cq^2d^3 & bqd^3 \\ bq & a & cq^3d^3 \\ cq^2 & bq & a \end{pmatrix}$
 Expliciter $M(q)$ sous forme d'un polynôme en K .

Calculer $\det(M(q))$.

6°. Calculer $M(1), M(j), M(j^2)$ puis $M(1)^{-1}$ lorsque $M(1)$ est inversible.

7°. Donner le rang de $M(1), M(j), M(j^2)$; K est-elle combinaison linéaire de ces 3 matrices ?

8°) Expliciter $1, M(1), M(1)^2$ dans la base (L_1, L_2, L_3) et donner le rang de $1, M(1), M(1)^2$.

Idée du barème :

I. ⑦. 1°) 1 2°) 1 3°) 2,5 4°) 2,5

II. ⑥. 1°) a) 0,5 b) 1 c) 1,5 2°) a) 0,5 b) 1 c) 1,5.

III. ⑦. 1°) 1 2°) 0,5 3°) 0,5 4°) 1 5°) 1 6°) 1 7°) 1 8°) 1.