

Problème I.

1°. On trouve: $\alpha^2 + \beta^2 = 3/8$

2°. $A = (\alpha I_4 - B)$ (Bantisymétrique)

et $A^t A = \alpha^2 I_4 - B^2 = I_4 \Rightarrow B^2 = (\alpha^2 - 1) I_4$.

3°. $A = \alpha I_4 + B \Rightarrow A^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha^{n-k} B^k$ or $B^2 = (\alpha^2 - 1) I_4$ donc,

$$A^n = \underbrace{\sum_{p=0}^{E(n/2)} C_n^{2p} \alpha^{n-2p} (\alpha^2 - 1)^p}_{P_n(\alpha)} I_4 + \underbrace{\sum_{p=0}^{E(n/2)} C_n^{2p+1} \alpha^{n-2p-1} (\alpha^2 - 1)^p}_{Q_n(\alpha)} B.$$

$A^n \cdot A^n = I_4$ d'où la relation demandée.

On a: $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^n = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$
 $= \sum_{p=0}^{E(n/2)} C_n^{2p} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2p} (-1)^p \left(\frac{3}{4} \right)^p + i \left[\sum_{p=0}^{E(n/2)} C_n^{2p+1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2p-1} (-1)^p \left(\frac{3}{4} \right)^p \right] \frac{\sqrt{3}}{2}$
 d'où: $P_n\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$ et $Q_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$.

4°. $(A - \lambda I_4)(A - \lambda I_4) = [(\alpha - \lambda)^2 - (\alpha^2 - 1)] I_4 \Rightarrow \lambda = \alpha \pm \delta$ où $\delta^2 = \alpha^2 - 1$.

$\text{rg}(A - \lambda I_4) = 2$: en effet. on a: $f: M(f) = A - \lambda I_4$ et $g: M(g) = A - \lambda I_4$.
 alors, $\text{rg}(f) = \text{rg}(g)$; or: $\text{rg} f + \text{rg} g \leq \dim E + \text{rg}(f \circ g)$.
 $\Rightarrow \text{rg} f \leq 2$; d'autre part $\text{rg} f \geq 2$ (det. d'ordre 2 extrait $\neq 0$).

Problème II: à une matrice, on fera correspondre un endomorphisme de E .
 e.v. de dim n . rapporté à une base $(e_1, e_2, \dots, e_k, \dots, e_n)$.

1° a). $M \in \mathbb{C}_k$, $N \in \mathbb{C}_k$ $M = M(f)$, $N = M(g)$. or: $f(e_i) = e_i$ $1 \leq i \leq k$
 donc, $f \circ g(e_i) = e_i$ ($i \leq k$) d'où $MN \in \mathbb{C}_k$. $g(e_i) = e_i$.

b). si f^{-1} existe, on a évidemment: $f^{-1}(e_i) = e_i$ pour $i \leq k$.

c). A $f \in \mathcal{L}(E)$, on fait correspondre $f_k \in \mathcal{L}(E)$ telle que: $f_k(e_i) = e_i$ si $i \leq k$ et $f_k(e_j) = f(e_j)$ si $j > k$.

$A = M(f)$, $B = M(g)$: il suffit de montrer que $(g \circ f)_k = g \circ f_k$ ce qui est évident.

On a pas $(A \cdot U)_k = A_k \cdot U$: contre exemple: si $j > k$: on prend $g / g(e_j) = e_j - e_1$
 et $f / f(e_1) = e_1 + e_j$. d'où: $(f \circ g)_k(e_j) = -e_1 \neq f_k \circ g(e_j) = e_j - e_1$.

2°. A $M \in \mathbb{C}'_k$ on fera correspondre $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que: $\forall i \neq k, f(e_i) = e_i$.

a). Evident (cf 1° a).

b). $M \in \mathbb{C}'_k$ sera inversible si $\text{rg}(f) = n \Leftrightarrow f(e_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ avec $\alpha_k \neq 0$.

Dans ce cas, $f^{-1}(e_i) = e_i$ donc, l'inverse de M est bien élément de $\mathbb{C}'_k$.