

c) Les solutions sont : $\lambda = 1$ et $\lambda = d_0$. $\lambda = d_0 \neq 1$: $\begin{pmatrix} 1-d_0 & 0 & d_1 & 0 \\ & \ddots & d_{n-1} & \\ 0 & & d_{n-1} & 1-d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i \neq n, x_i = \frac{d_i}{d_0-1} x_n$.
donc, l'ensemble des matrices K cherchées est l'ensemble des matrices proportionnelles $\tilde{a}$: $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_0-1 \end{pmatrix}$.

Problème III :

1°. $L_1 = \frac{1}{3d^2}(d^2 I_3 + dK + K^2)$ $L_2 = \frac{1}{3d^2}(d^2 I_3 + d j^2 K + j^2 K^2)$ et $L_3 = \frac{1}{3d^2}(d^2 I_3 + d j^4 K + j^4 K^2)$
 $L_1 + L_2 + L_3 = I_3$ et $K^3 = d^3 I_3$.

2°. On trouve : $L_R L_R = \delta_{RQ} L_Q$.

3°. Soit une combinaison linéaire : $aL_1 + bL_2 + cL_3 = 0$; on le multiplie par $L_1 \Rightarrow a = 0$, par $L_2 \Rightarrow b = 0$, par $L_3 \Rightarrow c = 0$.

4°. $K = d[L_1 + j^2 L_2 + j^4 L_3]$ et $K^2 = d^2[L_1 + j^2 L_2 + j^4 L_3]$.

5°. $H(q) = aI_3 + bqK + cq^2 K^2$

et $\det H(q) = a^3 + (bq d)^3 + (cq^2 d^2)^3 - 3a bq d cq^2 d^2 = (a + bq d + cq^2 d^2)(a + bj^2 q d + cj^4 q^2 d^2)(a + bj^4 q d + cj^2 q^2 d^2)$.

6°. $H(1) \cdot H(j) \cdot H(j^2) = \det H(1) \cdot I_3$ donc, si $\det H(1) \neq 0$, alors

$H(1)^{-1} = \frac{1}{\det H(1)} \cdot H(j) H(j^2)$.

7°. $H(1) = aI_3 + bK + cK^2$

$H(j) = aI_3 + bjK + cj^2 K^2$

$H(j^2) = aI_3 + bj^2 K + cjK^2$

(I_3, K, K^2) : famille libre.

$\Rightarrow \text{rg}(H(1), H(j), H(j^2)) = \text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & bj & cj^2 \\ a & bj^2 & cj \end{pmatrix}$

donc,

si $abc \neq 0$: $\text{rg} = 3$.

si $a = 0$ et $bc \neq 0$: $\text{rg} = 2$ (idem pour b et c)

si $a = b = 0$, $c \neq 0$: $\text{rg} = 1$

si $a = b = c = 0$: $\text{rg} = 0$.

Si $b \neq 0$, on a : $K = \frac{1}{3b} [H(1)j^2 H(j) - j H(j^2)]$

8°. En posant $a_1 = a + b d + c d^2$, $a_2 = a + b d j^2 + c d j$, $a_3 = a + b d j + c d^2 j^2$.

on a : $I_3 = L_1 + L_2 + L_3$

$H(1) = a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3$

$H(1)^2 = a_1^2 L_1 + a_2^2 L_2 + a_3^2 L_3$

(en utilisant les propriétés du 2°).

$\Rightarrow \text{rg}(H(1), H(1)^2, I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}$

$\text{rg} = 3$ si les a_i sont $\neq$ i.e. $cd \neq b j^2$

$\text{rg} = 2$ si $a_1 = a_2 \neq a_3$ (par exemple) $\left\{ \begin{array}{l} cd \neq b j \\ cd \neq b \end{array} \right.$

i.e. $b = cd$ ou $cd = b j$ ou $cd = b j^2$.

$\text{rg} = 1$ si $a_1 = a_2 = a_3$ i.e. $b = c = 0$.