

4x5

Jendredi 12/3/81

Devoir surveillé n° 7

I. Chercher les primitives des fonctions : donné en 76-77

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2x+5}} ; g(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \sin 3x} ; h(x) = \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}}$$

II. Etude du développement de $I_n = \int_0^1 (1-x)^n f(x) dx$ où $f \in \mathcal{C}_\infty^0([0,1], \mathbb{R})$

1°. On pose : $a_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$ où $(p,n) \in \mathbb{N}^2$, p et n n'étant pas simultanément nuls.

a). Calculer $a_{p,0}$, $a_{0,n}$ puis $a_{p,1}$ et $a_{1,n}$.

b) Etablir, en utilisant une intégration par parties, les relations suivantes : $a_{p,n} = \frac{p}{n+1} a_{p-1,n+1}$ ($p \geq 1$) et $a_{p,n} = \frac{n}{p+1} a_{p+1,n-1}$ ($n \geq 1$).

c) Exprimer $a_{p,n}$ en fonction de n, p et C_{n+p}^p ; montrer que, pour p fixe, n infiniment grand, $a_{p,n} \sim \frac{p!}{n^{p+1}}$.

2°. Soit $f \in \mathcal{C}_\infty^0([0,1], \mathbb{R})$.

a) Montrer (très simplement) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ et que : $I_n = \frac{f(0)}{n} (1 + \varepsilon_n)$ (où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$).

b) En utilisant la formule de Taylor-MacLaurin à l'ordre $p+1$, établir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{p+1} \left[I_n - \frac{f(0)}{n+1} - \frac{f'(0)}{(n+1)(n+2)} - \dots - \frac{f^{(p)}(0)}{(n+1)\dots(n+p+1)} \right] = 0$

c) On prend $p=2$:

i). Déterminer a, b et c tels que $I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} (1 + \varepsilon_n)$ ($\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$).

ii). Si on pose $J_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$, trouver α, β, γ tels que :

$$J_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + \frac{\gamma}{n^3} (1 + \varepsilon_n) \quad (\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0).$$

iii). Si $K_n = \int_0^1 [x^n + (1-x)^n] f(x) dx$, calculer u, v et w tels que :

$$K_n = \frac{u}{n} + \frac{v}{n^2} + \frac{w}{n^3} (1 + \varepsilon_n) \quad (\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0)$$

III. Soit la suite (f_n) de fonctions définies par : $f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t)^n e^{ix \cos t} dt$

1°. a) Trouver une relation simple entre f_2, f_1 et f_0 .

b). En écrivant : $(\cos t)^n = (\cos t)^{n-2} (1 - \sin^2 t)$ et à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation linéaire entre $f_{n+1}, f_n, f_{n-1}, f_{n-2}$ ($n \geq 2$). En déduire $f_n(0)$.