

2°) a). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; en appliquant la formule de Taylor à la fonction $e^{x \cos t}$, montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 2\pi]$, on peut écrire:

$$e^{x \cos t} = e^{x_0 \cos t} + (x - x_0) \cos t e^{x_0 \cos t} + (x - x_0) E(x, t)$$

où $E(x, t)$ satisfait: $|E(x, t)| \leq \frac{|x - x_0|^2}{2} e^{|x_0| + |x|}$

b). En déduire que f_0 est dérivable; calculer f'_0 .

c) Montrer alors que f_0 est indéfiniment dérivable; donner alors son développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

3°) a) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cosh(x \cos t) dt \quad \text{et} \quad f_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \sinh(x \cos t) dt.$$

En déduire des formules analogues pour f_n .

$$b). \text{ Montrer que: } \forall x \in \mathbb{R}^+: f_0(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \cosh(x \cos t) dt \geq \frac{2}{3} \cosh \frac{x}{2}$$

$$f_1(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \cos t \sinh(x \cos t) dt \geq \frac{1}{3} \sinh \frac{x}{2}$$

c). Étudier les variations, les branches infinies et tracer le graphe de f_0 .

N.B.: dans le III. les 1°, 2° et 3° sont indépendants dans une large mesure.

N.B.B.: le I, II, III sont totalement indépendants (!).

Idée du barème:

I. 4 : f. 1 ; g. 1,5 ; h. 1,5

II. 7,5 : 1°) 3 ; 2°) 4,5

III. 8,5 : 1°) 2,5 ; 2°) 3 ; 3°) 3.