

Corrigé du devoir sur feuille

I. Pour f, on pose $x-1 = 2t$, puis $t = \sinh u$ ou $t = \tanh \theta$ (la 1^{ère} méthode est plus simple; on trouve alors:

$$F = \frac{x+7}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2 \operatorname{Argosh} \frac{x-1}{2} + C = \frac{1}{2} + 2 \operatorname{Log}(x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + C$$

Pour g: $\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$, puis $u = \cos x$

$$\Rightarrow G = -\frac{1}{4 \cos x} - \frac{1}{8} \operatorname{Log} \frac{1+\cos x}{1-\cos x} + C = -\frac{1}{4 \cos x} + \frac{1}{4} \log \left| \tanh \frac{x}{2} \right| + C = -\frac{1}{4 \cos x} + \frac{1}{4} \operatorname{Argth}(\cos x) + C$$

Pour h, on fait une intégration par partie, et pour intégrer $\sqrt{1+e^x}$, on pose $u = \sqrt{1+e^x}$ d'où:

$$H = 2x(1+\sqrt{1+e^x}) - 4\sqrt{1+e^x} + 4 \operatorname{Log}(1+\sqrt{1+e^x}) + C = 2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} - 2 \operatorname{Log} \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$$

II. 1°.

a). $a_{p,0} = \frac{1}{p!}$; $a_{n,0} = \frac{1}{n!}$; $a_{p,1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$; $a_{n,n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

b). pas de problèmes.

c). par récurrence sur p, on trouve: $a_{p,n} = \frac{p(p-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} \cdot a_{0,n+p} = \frac{1}{(n+p+1)C_{n+p}^p}$
 p fixé, $n \rightarrow +\infty$: $a_{p,n} \sim \frac{p!}{n^{p+1}}$

2°.

a). $|I_n| \leq \int_0^1 (1-x)^n |f(x)| dx \leq \|f\| \cdot \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1} \|f\|$; donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

a b). $I_n = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} f(x) \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1-x)^{n+1} f'(x) dx = \frac{f(0)}{n+1} + \frac{1}{n+1} I_{n+1}(f')$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+1}(f') = 0$ (cf a)) donc, $I_n \sim \frac{f(0)}{n}$ c q f d.

b). $f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots + \frac{x^p}{p!} f^{(p)}(0) + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\theta_2)$

$\Rightarrow I_n = a_{0,n} f(0) + a_{1,n} f'(0) + \dots + \frac{1}{p!} a_{p,n} f^{(p)}(0) + R_{n,p}$; il suffit donc, d'établir

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{p+1} R_{n,p} = 0$ or $|R_{n,p}| \leq \frac{1}{(p+1)!} \int_0^1 (1-x)^n x^{p+1} |f^{(p+1)}(\theta_n)| dx$

$|R_{n,p}| \leq \frac{1}{(p+1)!} a_{n,p+1} \|f^{(p+1)}\| \sim \frac{1}{n^{p+2}} \|f^{(p+1)}\|$ (1° c) c q f d.

c). On applique le résultat du b).

i). $a = f(0)$; $b = f'(0) - f(0)$; $c = f(0) - 3f'(0) + f''(0)$.

ii). On pose $u = 1-x \Rightarrow J_n(f) = I_n(g)$ avec: $g(x) = f(1-x)$

d'où $a = f(1)$; $\beta = -f'(1) - f(1)$; $\gamma = f(1) + 3f'(1) + f''(1)$.

iii). $K_n = I_n + J_n \Rightarrow u = a + a$; $v = \beta + b$; $w = \gamma + c$.