

III 1°)

$$a). f_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos t} \cos t \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \cdot x e^{x \cos t} \, dt + \frac{x}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cdot e^{x \cos t} \, dt = x(f_0 - f_1)$$

d'où: $x f_2 + f_1 - x f_0 = 0$.

b). de même, on trouve: $x f_{n+1} + n f_n - x f_{n-1} - (n-1) f_{n-2} = 0$

avec $x=0$, on a: $f_n(0) = \frac{n-1}{n} f_{n-2}(0)$ et: $f_0(0) = 1$, $f_1(0) = 0$.

d'où: $\frac{f_{2p}(0)}{2^p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2^p (2p-2)(\dots)2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2}$ et $\frac{f_{2p+1}(0)}{2^{p+1}} = 0$.

2°)

a) On utilise Taylor-Lagrange à l'ordre 2: $f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(c)$

avec: $f(x) = e^{x \cos t}$. d'où: $e^{x \cos t} = e^{x_0 \cos t} + (x-x_0) \cos t e^{x_0 \cos t} + \frac{(x-x_0)^2}{2} \cos^2 t \cdot e^{c \cos t}$

donc: $|E(x, t)| \leq \frac{|x-x_0|^2}{2} e^{|c|}$ et $|c| \leq |x_0| + |x|$ c.q.f.d.

b). $f'_0(x) - f'_0(x_0) = \frac{1}{2\pi} (x-x_0) \int_0^{2\pi} \cos t e^{x \cos t} \, dt + \frac{1}{2\pi} (x-x_0) \int_0^{2\pi} E(x, t) \, dt$.

Pour que f'_0 soit dérivable, de dérivée f''_0 , il faut et il suffit que:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_0^{2\pi} E(x, t) \, dt = 0$ or: $\left| \int_0^{2\pi} E(x, t) \, dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |E(x, t)| \, dt \leq \frac{|x-x_0|}{2} \times 2\pi \cdot e^{|x_0|+|x|}$ c.q.f.d.

c). On raisonne de même avec $f'_n(x)$ et on montre: $f'_n(x) = f'_{n+1}(x)$

donc, par récurrence sur n , f_0 est n -fois dérivable et $f_0^{(n)} = f_n$.

f_0 est bien indéfiniment dérivable.

Taylor-Young: $f_0(x) = f_0(0) + x f'_0(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f_0^{(n)}(0) + o(x^n)$.

Or: $f_0^{(n)}(0) = f_n(0)$ on trouve:

$$f_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{2^n (n!)^2} + o(x^{2n+1})$$

3°/ a). On a: $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos t)^n e^{x \cos t} \, dt$: si on pose $u = \pi - t \Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos u)^n (-1)^n e^{-x \cos u} \, du$.

donc: $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos t)^n \frac{e^{x \cos t} + (-1)^n e^{-x \cos t}}{2} \, dt$

d'où: si $n = 2p$:

$$f_{2p}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2p} \cosh(x \cos t) \, dt \text{ et } f_{2p+1}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2p+1} \sinh(x \cos t) \, dt$$

b) $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \cos t \leq 1 \Rightarrow f_2(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cosh(x \cos t) \, dt \geq \frac{2}{3} \cosh \frac{x}{2}$

et $f_1(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sinh \frac{x}{2} \, dt = \frac{1}{3} \sinh \frac{x}{2}$.

c). f_0 paire et $f'_0 = f_1 \geq \frac{1}{3} \sinh \frac{x}{2} \geq 0$

