

I. Norme de matrice.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

Pour $A \in \mathcal{S}_n$, on pose :

φ_A la forme bilinéaire symétrique définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\varphi_A(x, y) = {}^t x A y$,
et q_A la forme quadratique associée.

(On identifie ici x vecteur de $\mathbb{R}^n$ et x matrice des coordonnées du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

1°) a) Soit $A \in \mathcal{S}_n$; montrer que pour x, y éléments de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\varphi_A(x, y) = \frac{1}{4}(q_A(x+y) - q_A(x-y)).$$

b) Montrer que la relation :

$$A \leq B \text{ si } \forall x \in \mathbb{R}^n : q_A(x) \leq q_B(x)$$

est une relation d'ordre définie dans $\mathcal{S}_n$.

2°) Soit $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{S}_n$ telles que $A \geq 0$.

a) Soient $A_1, A_2, \dots, A_k$ des matrices de $\mathcal{S}_n^+$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ des réels positifs ou nuls;

montrer que : $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \in \mathcal{S}_n^+$.

Si $A \in \mathcal{S}_n^+$, montrer que pour tout p entier naturel : $A^p \in \mathcal{S}_n^+$.

b) Justifier ou non l'affirmation suivante :

$A > 0$ (i.e. $A \geq 0$ et $A \neq 0$) si A est la matrice d'une forme quadratique (q_A) définie positive.

c) Application : soit $M_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$ où t est un paramètre réel.

On pose : $E = \{M_t, t \in \mathbb{R}\}$.

Montrer que $E \subset \mathcal{S}_2^+$ et que E est un groupe abélien pour la multiplication des matrices.

Montrer aussi que l'application : $t \in \mathbb{R} \mapsto M_t \in \mathcal{S}_2$ est monotone croissante.

3°) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{S}_n$; on dit que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A$ si chaque élément $a_{ij}^{(k)}$ de A_k a une limite a_{ij} .

Montrer alors que si (A_k) est une suite croissante et majorée (i.e. $\forall k \in \mathbb{N} : A_k \leq A_{k+1}$ et $A_k \leq B$), elle est convergente.

Indication : considérer pour i et j données les suites $q_{A_k}(e_i + e_j)$ et $q_{A_k}(e_i - e_j)$.

4°) Soit $A \in \mathcal{S}_n$;

a). montrer qu'à la matrice A , il est possible de faire correspondre un réel positif ou nul défini par : $N(A) = \sup_{\|x\| \leq 1} |q_A(x)|$ (ici, $\|x\| = \sqrt{{}^t x x}$: norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$).

Démontrer que : $N : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme.