

Démontrer l'inégalité: $|q_A(x)| \leq N(A) \|x\|^2$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$. (2)

En déduire l'équivalence: ($c > 0$):

$$N(A) \leq c \Leftrightarrow -c I_n \leq A \leq c I_n.$$

Exemple: calculer $N(M_E)$.

b). Montrer l'inégalité: $|\varphi_A(x, y)| \leq \frac{1}{2} N(A) \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

En déduire les propriétés:

i). $N(A) = \sup_{\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1} |\varphi_A(x, y)|$

ii). $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2: |\varphi_A(x, y)| \leq N(A) \cdot \|x\| \cdot \|y\|$.

II - Etude de $J(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$.

1°. Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale: $I_\alpha = \int_1^{+\infty} f_\alpha(t) dt$ où $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1} \sqrt{t-1}}$ est-elle convergente?

$\forall p \in \mathbb{N}$, établir une relation entre I_{p+1} et I_p et en déduire que:

$$I_p = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \pi. \text{ Montrer que } I_p \text{ admet une limite quand } p$$

tend vers l'infini. A l'aide de la formule de Stirling ($p! \sim \left(\frac{p}{e}\right)^p \sqrt{2\pi p}$) donner la valeur de cette limite.

2° a) Donner le D.L. de $\frac{1}{\sqrt{1-u}}$ à l'ordre n (u infiniment petit); exprimer le coef. de u^p en fonction de $\frac{I_p}{\pi}$.

b). t est un paramètre réel vérifiant $t > 1$ et $t > x$; donner alors le D.L. de $g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$ à l'ordre n (x infiniment petit).

(On l'écrira sous la forme: $g_t(x) = \sum_{p=0}^n a_p(t) \cdot x^p + x^{n+1} R_n(x, t)$)

Montrer que: $a_p(t) = A_p \cdot f_p(t)$ et donner la valeur de A_p .

$$(f_p(t) = \frac{1}{t^{p+1} \sqrt{t-1}}).$$

3° a). Déterminer le domaine de définition de: $J(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$

Montrer que $J(x)$ est croissante.

Vérifier que: $\forall h > 0, J(1-h) > \int_h^{+\infty} \frac{dt}{(t-1+h)\sqrt{t}}$ et en calculant cette dernière intégrale, montrer $J(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs négatives.

b). Vérifier que: $\forall u > 0$ et $\forall t > 0: t+u \geq 2\sqrt{tu}$.