

1. Nomme de matière :

1.7. a). évident

b). A et T évident; A.S.: $q_A(x) \leq q_B(x)$ et $q_B(x) \leq q_A(x) \Rightarrow q_A(x) = q_B(x)$
Or, comme il existe une bij. de l'ensemble des formes bilinéaires dans l'ensem.
ble des formes quadratiques, on peut affirmer que $\varphi_A = \varphi_B$ et donc $A = B$.

2.7. a). On a: $q(\sum \lambda_i A_i) = \sum \lambda_i q_{A_i}$ donc, $\sum \lambda_i A_i \in \mathcal{S}_n^+$.

$A^p \in \mathcal{S}_n^+$: si $p = 2k$: alors $q_{A^p}(x) = (A^k x) \cdot A^k x \geq 0$ (forme de carrés).

si $p = 2k+1$: $q_{A^p}(x) = (A^k x) \cdot A \cdot (A^k x) = q_A(A^k x) \geq 0$ c.q.f.d.

b). affirmation fausse si $n \geq 2$: exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c). $E \in S_2(\mathbb{R})$ et si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: $q_{H_E}(x) = \text{ch} x_1^2 + \text{ch} x_2^2 + 2 \text{ch} x_1 x_2 = \text{ch}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{\text{ch}} x_2^2 \geq 0$

$(E, \cdot)$ groupe abélien car $M_E \cdot M_{E'} = M_{E+E'}$.

$t \mapsto M_E$ monotone croissant: faux car $\varphi_{M_E - M_{E'}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{ch}(t-t')}{2} - \frac{\text{ch}(t+t')}{2} \right] \leq 0$

3.7. $q_{A_k}(e_i + e_j)$ suite $\mathbb{Z}$ et majorée (sur $\mathbb{R}$) donc convergente; de même pour $q_{A_k}(e_i - e_j)$ donc $\varphi_{A_k}(e_i, e_j) = a_{i,j}^{(k)}$ a bien une limite lorsque $k \rightarrow +\infty$.

4.7. a). Il faut montrer que $\{|q_A(x)|, \|x\| \leq 1\}$ est borné. Or: $\|x\| \leq 1$

$\Rightarrow \forall x: \|x\| \leq 1 \Rightarrow |q_A(x)| = |\sum a_{ii} x_i^2 + 2 \sum a_{ij} x_i x_j| \leq \sum |a_{ii}| + 2 \sum |a_{ij}|$ majorant.

N: norme: $N(A) \geq 0$ (évident).

1). $N(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ si $N(A) = 0$ alors: $\forall x: \|x\| \leq 1: q_A(x) = 0$
avec $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i \pm e_j)$ on trouve: $\forall (i, j) \in [1, n]^2: \varphi_A(e_i, e_j) = 0$ donc $A = 0$

2). $N(\lambda A) = |\lambda| \cdot N(A)$ OK.

3). $|q_{A+B}(x)| = |q_A(x) + q_B(x)| \leq |q_A(x)| + |q_B(x)| \Rightarrow N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.

$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ donc $\frac{1}{\|x\|^2} |q_A(x)| = |q_A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)| \leq N(A)$ donc $|q_A(x)| \leq N(A) \cdot \|x\|^2$ ①

$N(A) \leq c \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n: -c \|x\|^2 \leq q_A(x) \leq c \|x\|^2$

$-c \varphi_{-I_n}(x)$

$c \varphi_{I_n}(x)$ d'où l'inégalité demandée.

$N(H_E)$: si $\|x\| = 1$ (i.e.: $x_1^2 + x_2^2 = 1$) alors: $q_{H_E}(x) = \text{ch} t + 2 \text{ch} t \cdot x_1 \cdot x_2$.

on peut poser: $x_1 = \cos \theta$ et $x_2 = \sin \theta$ donc $|x_1 \cdot x_2| \leq \frac{1}{2}$ (égalité si $x_1 = x_2$).

d'où: $N(H_E) = e^E$.

b). On a: $|\varphi_A(x, y)| = \frac{1}{4} |q_A(x+y) - q_A(x-y)| \leq \frac{1}{4} (|q_A(x+y)| + |q_A(x-y)|) \leq \frac{1}{4} (N(A) \|x+y\|^2 + N(A) \|x-y\|^2)$

en utilisant ①.

2). $\{|\varphi_A(x, x)|, \|x\| \leq 1\} \subset \{|\varphi_A(x, y)|, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}$ ce qui se traduit par une sup: $N(A) \leq \sup \{ |\varphi_A(x, y)|, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \}$.

Or: $|\varphi_A(x, y)| \leq N(A)$ en utilisant la relation que l'on vient de démontrer; on a bien l'égalité demandée.

3). On utilise le fait que: $\varphi_A\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right) \leq N(A)$.