

II Etude de $J(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$

1°. en 1. pas de pb car $(t-x)^{1/2}$ et $x_2 < 1$; en $+\infty$, $f_d(t) \sim \frac{1}{t^{3/2}}$ donc, il faut $d > -1/2$.

$$I_{p+1} - I_p = - \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t-1}}{t^{p+2}} dt = - \left[-\frac{\sqrt{t-1}}{(p+1)t^{p+1}} \right]_1^{+\infty} - \frac{1}{2(p+1)} I_p \Rightarrow I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p.$$

d'où $I_p = \frac{(2p-1)(\dots)1}{2p \dots 2} \cdot I_0$. Pour calculer I_0 , on pose $u = \sqrt{t-1}$ et on trouve $I_0 = \pi$

donc, $I_p = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \pi$

On a $0 \leq I_{p+1} \leq I_p$; donc, la suite (I_p) est décroissante et minorée donc convergente. Puis $I_p \sim \sqrt{\frac{\pi}{p}}$, donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} I_p = 0$.

2°. a) $\frac{1}{\sqrt{1-u}} = 1 + \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{8} + \dots + \frac{I_p}{\pi} u^p + \dots + \frac{I_n}{\pi} u^n + o(u^n)$.

b). On trouve $a_p(t) = \frac{I_p}{\pi} f_p(t)$.

3°. a). $D_J =]-\infty, 1[$.

J croissante: si $x > x'$, $\frac{1}{\sqrt{t-x}} > \frac{1}{\sqrt{t-x'}}$ donc $J(x) > J(x')$.

En écrivant que $t-1 < t-1+h$ ($h > 0$) on a: $J(x) > \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t-1+h)\sqrt{t}} = I(h)$

$$I(h) = \frac{1}{\sqrt{1-h}} \cdot \text{Log}(1+\sqrt{1-h}) - \frac{1}{\sqrt{1-h}} \cdot \text{Log}(1-\sqrt{1-h}).$$

$\xrightarrow{0 < h \rightarrow 0^+} +\infty \text{ qd } h \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} J(x) = +\infty$.

b). Pour montrer: $t+u > 2\sqrt{tu}$ on élève au carré.

D'où, immédiatement: $J(-u) \leq \frac{1}{\sqrt{4u}} \cdot \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/4}\sqrt{t-1}}$.

et, par conséquent: $0 \leq J(-u) \leq \frac{1}{\sqrt{4u}}$.

$\xrightarrow{0 < u \rightarrow +\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} J(x) = 0$.

c) $J(x+h) - J(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}} \cdot x \frac{\sqrt{t-x} - \sqrt{t-x-h}}{\sqrt{t-x-h}} \rightarrow \frac{h}{\sqrt{t-x} + \sqrt{t-x-h}} \geq \frac{h}{2\sqrt{t-x-h}} \geq \frac{h}{2\sqrt{t-x}}$

d'où l'inégalité demandée

en prenant les valeurs absolues

On en déduit donc que J est continue.

4°. $\int_1^{+\infty} \beta_n(x,t) dt$ est absolument convergente, donc:

$$\int_1^{+\infty} g_r(x) dt = \sum_{p=0}^n \left(\int_1^{+\infty} a_p(t) dt \right) x^p + x^{n+1} \underbrace{\int_1^{+\infty} \beta_n(x,t) dt}_{o(x^n)}.$$

$$\pi \left[\frac{(2p)!}{2^p(p!)^2} \right]^2$$