

Exercice I : Etude d'une cubique :

Soit Γ la courbe d'équations :

$$\begin{cases} x = \frac{3t-1}{t^3+1} \\ y = \frac{3t^2+1}{t^3+1} \end{cases}$$

1°. a) Donner le tableau de variation.

b) Etudier les branches infinies et préciser la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

c) Chercher les points d'inflexion.

d) Tracer la courbe.

2°. Montrer que Γ est symétrique par rapport à une droite dont on précisera l'équation.

Exercice II : Résolution d'une équation différentielle :

1°. Intégrer l'équation différentielle : $(1-x^2)y' + xy = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ (E)

Préciser, parmi les solutions de (E), celles qui sont

i). continues sur $\mathbb{R}$

ii). dérivables sur $\mathbb{R}$.

2°. a). Déterminer le lieu des points des courbes intégrales où la tangente est parallèle à Ox .

b). Même question pour les points où $y'' = 0$.

Problème : Enveloppe de courbe, équation d'Euler d'une courbe :

Preamble : soit (I, f) un ^{chemin} paramétré de classe C^1 au moins, sans points stationnaires, $(C) = f(I)$ sont support.

On dit alors qu'une famille de droites $(D_\theta)_{\theta \in E}$ d'équation normale :

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta) \quad (\text{où } p \text{ est une fonction de classe } C^1 \text{ au moins sur } E)$$

enveloppe la courbe (C) si et seulement si :

$\forall t \in I$ ($M = f(t)$), $\exists \theta$ unique : D_θ tangente à (C) en M et réciproquement.

On démontre alors que (C) est définie de manière unique par la donnée de la fonction : $p: \theta \in E \mapsto p(\theta) \in \mathbb{R}$.

1°. Exemples : dans les questions a, b, c, donner un ensemble E convenable ainsi que la fonction p pour les courbes suivantes :

a). (C) : cercle de centre O , de rayon a (d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}$).

b). (C) : cercle passant par O d'équation : $x^2 + y^2 - 2ax = 0$
(utiliser le fait que la distance du centre à une tangente est égale au rayon).
Montrer que si $E = [0, \pi]$ alors $p(\theta) = a(1 + \cos \theta)$. Représenter la courbe décrite par la projection orthogonale H de O sur (D_θ) (On écrira son équation en polaires).

c). (C) : parabole d'équation : $x = 1 - \frac{y^2}{4}$
(la paramétrer par : $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$).

Montrer que $p(\theta) = \frac{1}{\cos \theta}$ et préciser la courbe décrite par H (cf b)).