

Concussion du devoirs

I. 1°. a). $x'(t) = \frac{-3(t-1)(2t^2+t+1)}{(1+t^3)^2}$, $y'(t) = \frac{-3t(t-1)(t^2+t+2)}{(1+t^3)^2}$

Tableau de variation:

t	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x'(t)$	+	+	+	0	-
x	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$
$y'(t)$	-	-	0	+	-
y	$-\infty$	$-\infty$	0	0	$-\infty$

b) Asymptote:

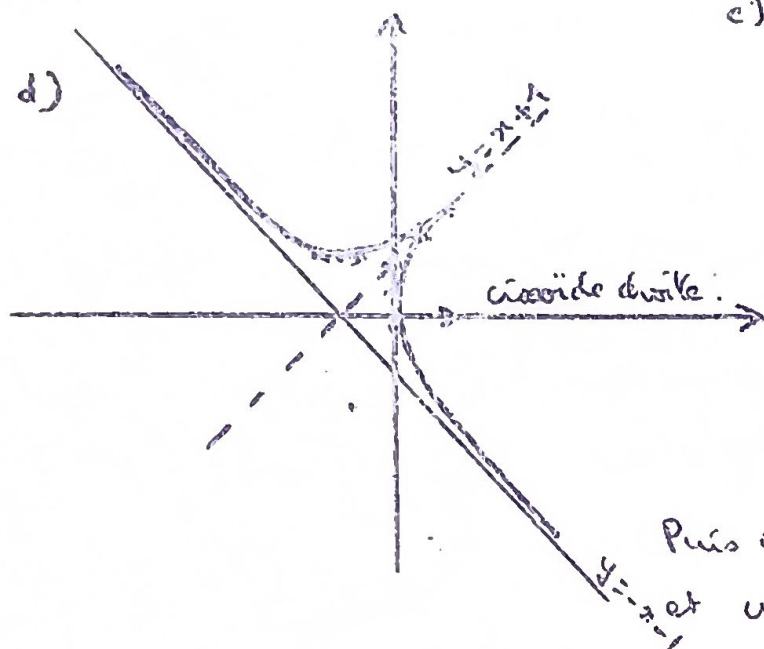
$$\frac{y}{x} = -1 + \frac{3}{4}T - \frac{3}{16}T^2 - \frac{9}{64}T^3 + o(T^3)$$

$$T.x = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}T + \frac{1}{9}T^2 + o(T^2)$$

d'où:

$$y = -x - 1 + \frac{1}{3}T^2 + o(T^2)$$

c). p^o d'inflexions: $\left(\frac{y'}{x'}\right)' = \frac{2(t^3+1)(t+1)}{(2t^2+t+1)^2}$
 $\Rightarrow$ pas de p^o d'inflexion.



2°. Symétrie / droite d'équation:

$$y = x + 1$$

On fait un changement de repère:

$$X = y - x - 1 = \frac{3t^2 - 3t + 2}{(t^3 + 1)}$$

$$Y = x + y = \frac{3t}{t^2 - t + 1}$$

Puis on pose successivement: $T = t + 1$, $u = \frac{1}{T}$
 et $u = \frac{1}{2}(v+1) \Rightarrow X = 6 \cdot \frac{1-v^2}{3v^2+1}$ et $Y = \frac{4v^3}{3v^2+1}$ c.q.f.d.

II. 1°. Solution particulière: $y_0 = \sqrt{1+x^2}$

d'où: $x < -1$: $y = y_0 + \lambda_1 \sqrt{x^2 - 1}$
 $-1 < x < 1$: $y = y_0 + \lambda_2 \sqrt{1 - x^2}$
 $x > 1$: $y = y_0 + \lambda_3 \sqrt{x^2 - 1}$

continues sur $\mathbb{R}$ $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.
 dérivables sur $\mathbb{R}$ si:
 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

2°. a). $y' = \frac{1}{1-x^2} \left[x \left(\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - y \right) \right]$ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$ ($x \neq \pm 1$)

b). En dérivant l'équation différentielle, on trouve:

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = \frac{2}{(1+x^2)^{3/2}}$$

et en utilisant la valeur de y' , on trouve:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2(1+x^4)}{(1+x^2)^{3/2}} : x \neq \pm 1$$

Problème:

1°. a). $E = [0, 2\pi]$ $p(\theta) = a$.

b). Centre: $\Omega \left(\frac{a}{\omega} \right) \Rightarrow |a\omega\theta - p(\theta)| = a \Rightarrow 2$ choix: $\begin{cases} p(\theta) = a(\omega\theta - 1) < 0 \\ p(\theta) = a(1 + \omega\theta) > 0 \end{cases}$

Or: la fonction p est continue et pour $\theta = 0$ $p = 2a \Rightarrow p(\theta) = a(1 + \omega\theta)$.
 (elle ne peut s'annuler sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$).

On obtient alors l'équation polaire de la courbe décrite par H :

$r = a(1 + \omega\theta)$: cardioïde:
 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ (parties).

