HX 5 Mercredi 21/10/81 Devoir surveillé n° 1

Etude des anneaux $\mathbb{Z}(i)$ et $\mathbb{Z}(\sqrt{13})$

I. Etude générale des anneaux $A(\sqrt{m})$

1°. A est un sous-anneau de B, anneau commutatif. Si $\alpha \in B-A$ et vérifie $\alpha^2 = m \in A$, on pose : $A(\sqrt{m}) = \{ a + b\alpha, (a,b) \in A^2 \}$.

a). Montrer que $A(\sqrt{m})$ est un anneau.

b). Montrer que si A est intègre, l'écriture d'un élément de $A(\sqrt{m})$ est unique. On supposera ceci réalisé dans la suite.

2°) Si $u \in A(\sqrt{m})$, on pose $\bar{u} = a - b\alpha$ (conjugué de u).

a) Montrer que : $u \longmapsto \bar{u}$ est un automorphisme de $A(\sqrt{m})$.

b) On définit $N(u) = u.\bar{u}$. Montrer que $N(u) \in A$ et que $N(u.v) = N(u)N(v)$.

c) Montrer que : u inversible dans $A(\sqrt{m}) \Leftrightarrow N(\alpha) \in A^*$. Calculer u^{-1}.

II. Etude de l'anneau des entiers de Gauss : $\mathbb{Z}(i)$. ($A = \mathbb{Z}$ et $m = -1$).

1°. a) Déterminer $\mathbb{Z}(i)^*$ (représenter les images dans le plan complexe).

b) Si $x \in \mathbb{Z}(i)$ et si $N(x)$ est un entier premier, montrer que x est irréductible dans $\mathbb{Z}(i)$. (i.e. si $x = u.v$ alors u ou v est inversible).

2°/ a) Soit $x \in \mathbb{Z}(i)$ et $y \in \mathbb{Z}(i) - \{0\}$, on pose $\frac{x}{y} = u + iv$ où $(u,v) \in \mathbb{Q}^2$. Soient u_0 et v_0 2 entiers tels que : $|u - u_0| \leq 1/2$ et $|v - v_0| \leq 1/2$. Montrer que : $x = y(u_0 + iv_0) + r$ avec $N(r) \leq 1/2\, N(y) < N(y)$. (On parle ici de division euclidienne). Dans quel cas a-t-on unicité du couple (u_0, v_0) ? (Faire un dessin et préciser les choix possibles).

b) En déduire que l'anneau $\mathbb{Z}(i)$ est principal (Si J est un idéal de $\mathbb{Z}(i)$, on pourra montrer qu'il est engendré par d où $N(d)$ est minimum (démonstration similaire à celle faite dans $\mathbb{Z}$)).

3°) a) On sait que $2 = (1+i)(1-i)$, donc 2 n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}(i)$ (alors qu'il l'est dans $\mathbb{Z}$). Montrer aussi que 5, 13 et 17 sont réductibles (dans $\mathbb{Z}(i)$).

b). Montrer que si p premier dans $\mathbb{Z}$: alors :

p réductible dans $\mathbb{Z}(i) \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2 : p = a^2 + b^2$