

c) En déduire que si p est premier dans $\mathbb{Z}$ et $p \geq 3$ alors :

p irréductible dans $\mathbb{Z}(i) \Rightarrow p \equiv 1[4]$. Que penser de a ?

(On raisonne sur la parité de a et b).

III. Etude d'un anneau non factoriel : $\mathbb{Z}(\sqrt{13})$.

1°. a) Montrer que l'équation en nombres entiers $a^2 - 13b^2 = 2$ est impossible (on étudiera les différents cas de parité de a et b ou on se placera dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$).

b) En déduire que 2 , $3 - \sqrt{13}$ et $-3 - \sqrt{13}$ sont irréductibles.

c) Trouver un élément de $\mathbb{Z}(\sqrt{13})$ décomposable de 2 manières différentes en produit d'éléments irréductibles (donc $\mathbb{Z}(\sqrt{13})$ n'est pas factoriel).

2°. Etude de l'ensemble $U = \mathbb{Z}(\sqrt{13})^*$.

a) Montrer que si $x + y\sqrt{13} \in U$ et si $x + y\sqrt{13} > 1$ alors $x > 0$ et $y > 0$ (si $x < 0$ ou si $y < 0$, on montrera et on utilisera les deux propriétés : $x + y\sqrt{13} \leq |x| + |y|\sqrt{13}$ et $|x + y\sqrt{13}|(|x| + |y|\sqrt{13}) = 1$).

b) Montrer que $18 + 5\sqrt{13} \in U$. Question facultative : montrer que c'est le plus petit élément de U strictement supérieur à 1.

c) On sait que si $x \in \mathbb{R}$ et si $x > 1$ alors : $\exists n \in \mathbb{N}$: $(18 + 5\sqrt{13})^n \leq x < (18 + 5\sqrt{13})^{n+1}$. En déduire que si $x \in U$ et si $x > 1$ alors, $\exists n \in \mathbb{N}$: $x = (18 + 5\sqrt{13})^n$.

d) Montrer alors que $U = \{\pm (18 + 5\sqrt{13})^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

e) Donner les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $x^2 - 13y^2 = 1$.

N. B. : - On peut admettre les résultats d'une question pour passer à la suivante. Dans la notation, il sera tenu compte de la présentation et de la rigueur des démonstrations (en particulier dans le II. 2°).

Idée du barème : I : (4) : 1°. 2, 2°/ 2 II (8) : 1°. 2 2°. 3,5 3°/ 2,5

III : (8) : 1°. 2,5 2°. 5,5.