

Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ si a est pair $a^2 \equiv 0[4]$ et si a est impair $a^2 \equiv 1[4]$.

Si a et b sont pairs, p serait divisible par 4 : impossible.

Si a et b sont impairs, p serait divisible par 2 : " " " "

Donc, a et b sont de parité différente, par conséquent $p \equiv 1[4]$, ce qui est le cas des nombres premiers étudiés au a).

III 1° a) On fait le même genre de raisonnement que ci-dessus :

a, b pairs : $a^2 - 13b^2 \equiv 0[4]$; a, b impairs : $a^2 - 13b^2 \equiv 1 - 13 \equiv -12[4] \equiv 0[4]$

a pair, b impair : $a^2 - 13b^2 \equiv -13b^2[4] \equiv 3[4]$ | Conclusion, on ne peut avoir

a impair, b pair : $a^2 - 13b^2 \equiv a^2[4] \equiv 1[4]$ | $a^2 - 13b^2 = 2$

(ni $a^2 - 13b^2 = -2$)

b).

On a : $N(2) = 4$ si 2 est irréductible, on a $2 = uv$ avec $N(u) \neq \pm 1$ et $N(v) \neq \pm 1$

donc $N(u)N(v) = 4 \Rightarrow N(u) = N(v) = \pm 2$ ce qui est impossible en vertu du a). (cf I 2° c).

De même : $N(3 - \sqrt{13}) = -4$ et $N(-3 - \sqrt{13}) = -4$.

c) On a : $4 = 2 \cdot 2 = (3 - \sqrt{13})(-3 - \sqrt{13})$ c.q.f.d.

2° a) Soit $x + y\sqrt{13} \in U$ et $x + y\sqrt{13} > 1$, on a : $x^2 - 13y^2 = \pm 1$

Si $x > 0$ et $y > 0$, OK ; si $x < 0$ et $y < 0$ impossible ; montrons qu'il en est de même pour $xy < 0$.

$(x + y\sqrt{13})(x - y\sqrt{13}) = \pm 1 \Rightarrow |x + y\sqrt{13}| |x - y\sqrt{13}| = 1$; si $x + y\sqrt{13} > 1$ alors :

$|x - y\sqrt{13}| < 1$ mais : $|x - y\sqrt{13}| = |x| + |y|\sqrt{13}$ car x et y ont de même signe et on a les 2 inégalités contradictoires : $|x| + |y|\sqrt{13} < 1 < x + y\sqrt{13}$ et $x + y\sqrt{13} \leq |x| + |y|\sqrt{13}$ c.q.f.d.

b). $18 + 5\sqrt{13} \in U$ (évident).

c). Soit $x \in U$: $x(18 + 5\sqrt{13})^n \in U$ et $x(18 + 5\sqrt{13})^n \geq 1$

d'autre part : $x(18 + 5\sqrt{13})^n < 18 + 5\sqrt{13} \Rightarrow x(18 + 5\sqrt{13})^n \in U$ c.q.f.d.

d). Si $x \in U$ et $|x| > 0$, 2 cas : $\begin{cases} x \geq 1 & \text{OK} \\ x < 1 & \text{alors } \frac{1}{x} \geq 1 \cdot \frac{1}{x} = (18 + 5\sqrt{13})^n \\ & \Rightarrow x = (18 + 5\sqrt{13})^{-n} \\ \text{si } x < 0 & \text{alors } -x > 0 \text{ et on est ramené au cas ci-dessus. c.q.f.d.} \end{cases}$

e). Si (x, y) est solution, alors, $(-x, y)$, $(x, -y)$ et $(-x, -y)$ sont solutions :

on se limite au cas où $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x + y\sqrt{13} \geq 1$:

$N(18 + 5\sqrt{13})^n = [N(18 + 5\sqrt{13})]^n = (-1)^n$ donc : $x + y\sqrt{13} = (18 + 5\sqrt{13})^{2n}, n \in \mathbb{N}$.

D'où : $x = \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k} 18^{2n-2k} 5^{2k} 13^k$ et $y = \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k+1} 18^{2n-2k-1} 5^{2k+1} 13^k$