

Problème:

Consignes du devoir:

1°. a) On a: $\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{I} = \vec{K} \wedge \vec{I} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -y \quad \frac{dy}{dt} = x \quad \frac{dz}{dt} = 0$

$z = c$ or $z(0) = 0 \Rightarrow z = 0$.

$\frac{d^2x}{dt^2} = -x \Rightarrow x = A \cos(t + \varphi)$ et $y = A \sin(t + \varphi)$: or pour $t=0$ on a $x=y=0$

$\Rightarrow x = \cos t, y = \sin t. \Rightarrow \boxed{\vec{I} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}}$

b). De même: $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{J} \Leftrightarrow (\vec{K} + \vec{I}) \wedge (\vec{u} \cos \theta + \vec{K} \sin \theta) = \frac{d\vec{J}}{dt}$

Or: $\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \vec{u} - \vec{u} \sin \theta \cdot \theta' + \vec{K} \cos \theta \cdot \theta'$ avec $\frac{d\theta}{dt} = -\vec{I}$
et $(\vec{K} + \vec{I}) \wedge (\vec{u} \cos \theta + \vec{K} \sin \theta) = -\vec{I} \cos \theta + \vec{K} \cos \theta - \vec{u} \sin \theta$ $\Rightarrow \theta' = 1; \theta = t + \varphi$

et les conditions initiales $\Rightarrow \sin \varphi = 1 \quad \cos \varphi = 0$ i.e. $\varphi = \pi/2$.

d'où: $\boxed{\vec{J} = -\vec{u} \sin t + \vec{K} \cos t}$

2°. D est tangente à (C) car elle passe par O_1 et elle contient le vecteur tangent à (C) car: $\frac{d\vec{OO}_1}{dt} = R \cdot \vec{\Omega}$. Comme $\|\vec{\Omega}\| = \sqrt{2}$, on trouve:

$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{\Omega} \quad (R > 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{I} + \vec{K}) \quad \vec{N} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{I} + \vec{K})$

$R = \frac{1}{\|\frac{d\vec{I}}{dt}\|} = 2R$ de même $T = 2R$.

3°. On a: $\vec{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{I} + \vec{K}) (= \vec{T}) \quad \vec{J}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{I} + \vec{K}) (= \vec{B})$

et $\vec{K}_1 = -\vec{u}$.

Dans le repère $(M, \vec{K}, \vec{I}, \vec{u})$ on a: $\frac{d\vec{I}_1}{dt} = \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{I}_1 \Rightarrow \kappa = 0$ si $\vec{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$

puis: $\frac{d\vec{K}_1}{dt} = -\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{I} = \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{K}_1 \Rightarrow \vec{\Omega}_1 \perp \vec{I} \Rightarrow q = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega}_1 = \vec{K}}$

Axe central: on a: $\vec{V}_M = \vec{V}_{O_1} + f'(r) \vec{\Omega} + f(r) \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$

Or: $\vec{V}_{O_1} = R (\vec{K} + \vec{I}) = R \vec{\Omega}$ et $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{u}$.

$\Rightarrow \vec{V}_M = (R + f'(r)) (\vec{K} + \vec{I}) + f(r) \vec{u} \Rightarrow \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{V}_M = (R - f(r)) \vec{u} + f(r) \vec{I}$

Donc, l'axe central dans le repère $(M, \vec{K}, \vec{I}, \vec{u})$ a pour équation:

$\boxed{M\vec{P} = \lambda \vec{K} + (R + f'(r)) \vec{u} - f(r) \vec{I}}$

Dans le repère $(O_1, \vec{K}, \vec{I}, \vec{u})$ on a: $\vec{O_1P} = \lambda_1 \vec{K} + (R + f'(r)) \vec{u}$. (D₁)

et $\vec{O_1O} = \lambda (\vec{K} + \vec{I})$ (D)

Pour que (D) et (D₁) se coupent, il faut et il suffit qu'il existe

λ et λ_1 tels que: $\lambda_1 \vec{K} + (R + f'(r)) \vec{u} = \lambda \vec{K} + \lambda \vec{I}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda = 0$ et $\boxed{R + f'(r) = 0}$ C.N.S. deux points qui sont colinéaires à O_1 .