

Exercice:

1°. $\frac{d\vec{T}}{dt} = 3a\sqrt{5} \sin t \cos t \vec{T}$ ou: $\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$
 et $\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \cos t \\ -2 \sin t \\ -1 \end{pmatrix}$.

En utilisant la relation: $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{R} \vec{N}$ et en projetant sur $\vec{T}$ on a:

$\boxed{R = 15a \sin t \cos t}$, de même avec $\frac{d\vec{B}}{ds} = -\frac{1}{T} \vec{N} \Rightarrow \boxed{T = \frac{15a \sin t \cos t}{2}}$

2°. En reprenant les formules établies en exercice: $\vec{R} = \frac{v}{T} \vec{T} + \frac{v}{R} \vec{B}$.

on trouve: $\vec{R} = \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{T} + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{B} = -\vec{k}$.

Vitesse de glissement: $\frac{\vec{R} \cdot \vec{V}_H}{\vec{R}^2} = 3a \sin 2t$. $\vec{V}_g = -3a \sin 2t \vec{k}$

Axe instantané de rotation: $\vec{HP} = \frac{1}{\vec{R}^2} \vec{R} + \frac{\vec{R} \wedge \vec{V}_H}{\vec{R}^2}$.

D'où, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{cases} x = 3a \sin^2 t \cos t + a \cos^3 t \\ y = 3a \cos^2 t \sin t + a \sin^3 t \\ z = \lambda \end{cases}$$

3°. On a: $C(V) = \int_0^{\pi/2} V(t) dH = \int_0^{\pi/2} [-3a \omega^2 t \sin t e^t + 3a \sin^2 t \omega e^t - 3a \sin 2t \omega] dt$

après linéarisation:

$$C(V) = \frac{3a}{4} \left[\int_0^{\pi/2} e^t \omega t dt - \int_0^{\pi/2} e^t \omega 3t dt + \int_0^{\pi/2} e^t \sin t dt - \int_0^{\pi/2} e^t \sin 3t dt - 2 \int_0^{\pi/2} e^t \sin 2t + 2 \int_0^{\pi/2} e^t \sin t dt \right]$$

On utilise les formules:

$$\int e^{at} \cos bt dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2} [a \cos bt + b \sin bt] \text{ et } \int e^{at} \sin bt dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2} [a \sin bt - b \cos bt]$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} e^t \omega t dt - \int_0^{\pi/2} e^t \sin t dt = \cancel{-1} - 1$$

$$- \left[\int_0^{\pi/2} e^t \omega 3t dt + \int_0^{\pi/2} e^t \sin 3t dt \right] = \frac{1}{5} [2e^{\pi/2} - 1]; \quad -2 \int_0^{\pi/2} e^t \sin 2t dt = \frac{2}{5} [2e^{\pi/2} + 2]$$

$$\text{or: } 2 \int_0^{\pi/2} e^t \sin 2t dt = \frac{2}{5} [2e^{-\pi/2} + 2]$$

$$\Rightarrow C(V) = \left(-\frac{2}{5} e^{\pi/2} + \frac{4}{5} e^{-\pi/2} - \frac{6}{5} \right) \frac{3a}{4}$$