

Problème I :

1°) Soient p réels $x_1, x_2, \dots, x_p$ tels que $0 < x_1 < \dots < x_p$. On suppose que le polynôme P_p de degré $2p+1$ admet les racines : $0, x_1, \dots, x_p, -x_1, \dots, -x_p$. Montrer que l'on peut écrire

$$P_p = \lambda x \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{x^2}{x_k^2}\right).$$

Donner la limite de $\frac{P_p(x)}{x}$ quand x tend vers 0.

2°) On pose $n=2p+1$

a) exprimer $\sin(nt)$ en fonction de $\sin t$ et $\cos t$.

b) Montrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n tel que $P_n(\sin t) = \sin(nt)$; donner les racines de P_n ; en déduire : $P_n(\sin t) = n \sin t \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \pi/n}\right) \dots \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 p\pi/n}\right)$.

c) En utilisant une technique semblable, montrer l'égalité :

$$\sin(nt) = n \cos^n t \cdot \operatorname{tg} t \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^2 \pi/n}\right) \dots \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^2 p\pi/n}\right)$$

3°) On admet les résultats suivants :

i) si $0 < x < y < \pi/2$ alors $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} < \frac{x}{y} < \frac{\sin x}{\sin y}$ ii) si on pose $\prod_n = \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{t^2}{k^2 \pi^2}\right)$ alors

$\prod_n$ a une limite quand n tend vers $+\infty$ notée F . ($n=2p+1$)

Montrer alors que : $\sin t = t F$. (On note $\sin t = t \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{k^2 \pi^2}\right)$)

Problème II :

A) Les polynômes envisagés sont à coefficients réels. a est un réel donné ; on lui associe le polynôme $P_a(X) = X^2 + a$.

1°) Montrer qu'il existe un polynôme et un seul Q_a , de degré 4, tel que : $P_a \circ Q_a = Q_a \circ P_a$

(i.e. $P_a(Q_a(X)) = Q_a(P_a(X))$). Comparer P_a et Q_a : pouvait-on sans calcul prévoir un polynôme de degré 2 ou de degré 4 commutant avec P_a pour la loi $\circ$?

2°) Montrer qu'il existe 2 valeurs de a pour lesquelles il existe un polynôme S_a de degré 3, tel que $P_a \circ S_a = S_a \circ P_a$; donner ces valeurs de a et les polynômes S_a correspondants; prouver (les calculs ne sont pas nécessaires!) que $Q_a \circ S_a = S_a \circ Q_a$.

3°) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer les polynômes p_n de degré n , tels que $p_n(X^2) = (p_n(X))^2$.

B) Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$, définie par $f(z) = z + 1/z$; on a :

$f^k(z) = (f(z))^k$ et $f(z^k) = z^k + 1/z^k$ ($k \in \mathbb{Z}$); on étend à $k = 0$ en posant :

$$z^0 = 1, f(z^0) = 2, f^0(z) = 1.$$

1°) Montrer que, k et m étant des entiers, on a : $f(z^k)f(z^m) = f(z^{k+m}) + f(z^{k-m})$.

Expliciter $f^2(z^k)$ en fonction de $f(z^{2k})$.