

2°) Déterminer l'ensemble F des z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$; l'application $f^{\mathbb{Z}}$ définie par :

$z \in F \mapsto f^{\mathbb{Z}}(z) = f(z) \in \mathbb{R}$ est-elle surjective?

3°) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme et un seul T_n tel que, $\forall z \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$,

$T_n(f(z)) = f(z^n)$: ne pas chercher à calculer les coefficients de T_n , mais établir une relation liant T_{n+1} , T_n , T_{n-1} ; calculer T_0 , T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , T_5 .

Préciser pour $n \geq 1$, les valeurs $T_n(2)$, $T_n(-2)$, $T_n(10,1)$, $T_n(0)$, $T_n(-1)$.

C) Soit la suite récurrente de réels définie par la relation : $u_{n+1} + u_{n-1} = au_n$.

a est un réel donné; on précise de plus u_0 et u_1 .

1°) Exprimer u_n à l'aide de n , u_0 , u_1 pour $a = 2$ et $a = -2$.

2°) Dans les cas où $a^2 \neq 4$, montrer qu'il existe un couple de réels (b, c) dépendant de u_0 , u_1 , a (mais non de n) tel que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = bT_n(a) + cT_{n+1}(a)$$

(calculer effectivement b et c)

Question subsidiaire : si $a > 0$, la suite $T_n(a)$ est-elle convergente ? (utiliser le B 2°)

Quelle relation doit-on avoir entre u_0 et u_1 pour que la suite u_n soit convergente?

Donner alors la limite de u_n .

Idée du barème :

Pb I : 7 : 1° 1,5 2° 4 3° 1,5

Pb II:13 : A) 1° 2 2° 1,5 3° 1 B) 1° 1 2° 1,5 3° 3 C) 1° 1 2° 2