

Problème I.

1°. P_p peut s'écrire: $P_p = X \cdot \prod_{k=1}^p (X - x_k) \cdot \prod_{k=1}^p (X + x_k) \cdot Q$; or $\deg P = 2p+1 \Rightarrow \deg Q = 0$.
 $Q \in \mathbb{R} \Rightarrow P_p = \mu X \prod_{k=1}^p (X^2 - x_k^2) = \mu \cdot \prod_{k=1}^p (-x_k^2) \cdot \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{X^2}{x_k^2}\right)$; $\lambda = \mu \cdot \prod_{k=1}^p (-x_k^2)$
 $\frac{P_p(x)}{x} = \lambda \cdot \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{x^2}{x_k^2}\right) \rightarrow \lambda \neq 0 \text{ car } x \rightarrow 0$.

2°. a). Avec la formule de Moivre, on trouve: $\sin nt = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^k t \sin^{2k+1} t$

b). $n = 2p+1 \Rightarrow n = 2(p-k) + 2k+1 = 2(p-k) + 2k+1$:
 $\cos^{n-(2k+1)} t = (1 - \sin^2 t)^{p-k}$: comme $P_n(\sin t) = \sum_{k=0}^p (-1)^k C_n^{2k+1} (1 - \sin^2 t)^{p-k} \sin^{2k+1} t$ est une somme de polynômes en $\sin t$ de degré n , $\deg P_n \leq n$. Si on calcule le coef. de chaque terme de degré $n = 2p+1 = 2(p-k) + 2k+1$, on trouve que le coef. de $\sin^n t$ est: $(-1)^p \sum_{k=0}^p C_n^{2k+1} \neq 0$

(Recherchons les racines de P_n : $\sin nt = 0 \Leftrightarrow P_n(\sin t) = 0$: or: $\sin nt = 0 \Leftrightarrow nt = k\pi$.
 $t = \frac{k\pi}{n}$. Pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, $\sin t$ prend toutes les valeurs comprises entre -1 et $+1$.
 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{k\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{n}{2} \leq k \leq \frac{n}{2} \Leftrightarrow -p \leq k \leq p$: $2p+1$ valeurs pour $x_k = \sin \frac{k\pi}{n}$

Et: $0 < x_1 < \dots < x_p$: on peut appliquer le résultat du 1°. car $x_{-k} = -x_k$.

$P_n(\sin t) = \lambda \cdot \sin t \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right)$: montrons que $\lambda = n$.

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_n(\sin t)}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin nt}{\sin t} = n.$$

c). On a: $\sin nt \neq 0$: $\sin nt = \cos^n t \cdot \sum_{k=0}^p (-1)^k C_n^{2k+1} (\cos t)^{2k+1}$ polynôme de degré n en t : $Q_n(\cos t) = \frac{\sin nt}{\cos^n t}$: donc, si $\sin nt = 0$ alors $Q_n(\cos t) = 0$; on trouve les mêmes valeurs pour t qu'au b): $2p+1$ racines pour Q_n : $\cos \frac{k\pi}{n}$, $-p \leq k \leq p$

D'autre part: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q_n(\cos t)}{\cos t} = n$ d'où la formule.

3°. On a les inégalités suivantes: $\frac{\cos^2 x}{\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2} < \frac{x^2}{\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2} < \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}$ d'où:

$$\prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 \frac{k\pi}{n}}\right) > \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{x^2}{\cos^2 \frac{k\pi}{n}}\right) > \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}}\right) \text{ et en posant } t = \frac{x}{n}.$$

on a trouve, $\frac{\sin t}{n \left(\cos \frac{t}{n}\right)^n \cos t} > \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{\cos^2 t}{\cos^2 \frac{k\pi}{n}}\right) > \frac{\sin t}{n \sin^2 \frac{t}{n}}$. Or: $\left(\cos \frac{t}{n}\right)^n \rightarrow 1$ qd $n \rightarrow +\infty$
 $n \sin \frac{t}{n} \rightarrow t$ d'où la formule
 $n \cos \frac{t}{n} \rightarrow 1$

Problème II.

A). 1°. Q_a est normalisé (en regardant les termes de + haut degré)

$Q_a = X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta$ et $Q_a^2 + a = Q_a(X^2 + a) \Rightarrow Q_a^2$ pair et comme $\deg Q_a = 4 \Rightarrow Q_a$ pair: $\alpha = \gamma = 0$. Et après on fait les calculs!

$$Q_a = P_a \circ P_a = (X^2 + a)^2 + a \text{ (on pourrait en effet le prévoir).}$$

2°. Pour les mêmes raisons qu'au 1°, S_a est normalisé et impair.

$$\Rightarrow S_a = X^3 + \alpha X \Leftrightarrow 3a = 2\alpha \text{ et } 3a^2 - 6a = 0: 2 \text{ valeurs pour } a: 0 \text{ et } -2$$