

$S_a = X^3$ ou $S_a = X^3 - 3X$. On a évidemment $Q_a \circ S_a = S_a \circ Q_a$ car $Q_a = P_a \circ P_a$.

3°. P_n est normalisé et $P_n = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$.

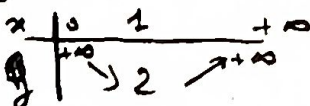
$$\left. \begin{aligned} P_n(X)^2 &= X^{2n} + 2a_{n-1}X^{2n-1} + Q_{2n-2} : \deg Q_{2n-2} \leq 2n-2 \\ P_n(X^2) &= X^{2n} + R_{2n-2} : \deg R_{2n-2} \leq 2n-2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_{n-1} = 0 \text{ et}$$

par récurrence, $a_{n-k} = 0$ d'où: $\underline{P_n = X^n}$.

B). 1°. $f^2(z^k) = f(z^{2k}) + 2$.

$$2^\circ. z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z - \bar{z} = \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} \Leftrightarrow z = \bar{z} \text{ ou } z\bar{z} = 1 (z \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^* \cup U : U = \{ \text{nbres complexes de module } 1 \} = \{ e^{i\theta} \}.$$

Si $z \in \mathbb{R}$: étudions la fonction: $x + \frac{1}{x}$ (impair): sur $]0, +\infty[$: 

Si $z \in U$: $z = e^{i\theta}$: $z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta \in [-2, +2]$ donc, f^* est bien surjective.

3°. On trouve: $T_{n+1}(f(z)) = f(z) \cdot T_n(f(z)) - T_{n-1}(f(z))$; $T_0 = 2$, $T_1 = X$ donc, par récurrence sur n , T_n est bien un polynôme qui vérifie: $\boxed{T_{n+1} = XT_n - T_{n-1}}$.

On trouve: $\underline{T_2 = X^2 - 2}$, $\underline{T_3 = X^3 - 3X}$; $\underline{T_4 = X^4 - 4X^2 + 2}$; $\underline{T_5 = X^5 - 5X^3 + 5X}$.

(On remarque que si on prend $a = -2$ dans le A: $T_2 = P_a$, $T_3 = S_a$, $T_4 = Q_a$).

$$2 = f(1) \Rightarrow T_n(2) = T_n(f(1)) = f(1^n) = 2$$

$$\text{De même: } -2 = f(-1) \Rightarrow \underline{T_n(-2) = 2(-1)^n}; 10, 1 = f(10) \Rightarrow \underline{T_n(10, 1) = 10^n + \frac{1}{10^n}}$$

$$0 = f(\cos \pi/2) \Rightarrow \underline{T_n(0) = 2\cos(n\pi/2)}; -1 = f(\cos 2\pi/3) \Rightarrow \underline{T_n(-1) = 2\cos(2n\pi/3)}.$$

C). 1°. $\boxed{a=2}$: (u_n) : suite récurrente double: $r=1$ racine double $\Rightarrow u_n = \alpha + n\beta$
d'où: $\underline{u_n = u_0 + n(u_1 - u_0)}$.

$\boxed{a=-2}$: $r=-1$ racine double $\Rightarrow u_n = \alpha(-1)^n + n\beta(-1)^n$ d'où: $\underline{u_n = (-1)^n u_0 - n(-1)^n (u_0 + u_1)}$

2°. Compte tenu de la relation du B. 3°), la suite $T_n(a)$ vérifie:

$$T_{n+1}(a) = aT_n(a) - T_{n-1}(a) \Leftrightarrow T_{n+1}(a) + T_{n-1}(a) = aT_n(a)$$

La suite $T_{n+1}(a)$ vérifie la même relation: pour montrer que (u_n) s'exprime en fonction de $T_n(a)$ et $T_{n+1}(a)$, il faut et il suffit que le déterminant: $\begin{vmatrix} T_0(a) & T_1(a) \\ T_1(a) & T_2(a) \end{vmatrix} \neq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4 \neq 0.$$

$$\text{On trouve } b = \frac{u_0(a^2 - 2) + u_1 a}{a^2 - 4}, \quad c = \frac{2u_0 - a u_1}{a^2 - 4}$$

Question subsidiaire: $T_n(a) = f(a^n) = a^n + \frac{1}{a^n}$: Si $|a| > 1$: $|T_n(a)| \rightarrow \infty$

de même si $|a| < 1$. Si $a = -1$: $T_n(a) = (-1)^n \cdot 2$ ne converge pas, donc

$T_n(a)$ ne converge que si $a = 1$: $T_n(1) = 2$.

$$u_n = b \cdot a^n + c \cdot a^{n+1} + b \cdot a^{-n} + c \cdot a^{-n-1}. \text{ Si } |a| > 1: \text{ il faut } b \cdot a^n + c \cdot a^{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow b + c \cdot a = 0 \Leftrightarrow u_1 = \frac{u_0}{a}. \text{ Et si } |a| \leq 1: b \cdot a^n + c \cdot a^{n+1} = 0 \Leftrightarrow u_1 = a \cdot u_0.$$

Dans les 2 cas: $\lim u_n = 0$ (suite géométrique de raison a ou $1/a$).