

81.82. $x = 17$.

HX 5

Mercredi 2/12/81

DEVOIR SURVEILLE n° 3

Exercice I : décomposer les fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$:

(25)

$$a) f = \frac{1}{(x+1)^7 - x^7 - 1} \quad b) g = \frac{1}{x^5 - 3x^3 - x^2 + 3} \quad (j : \text{pôle}) \quad c) h = \frac{x^5 + 2}{(x-1)^3(x^2 - x + 1)}$$

Exercice II : Soit $P = 2x^3 - (9+8i)x^2 + (2+20i)x + a-8i$ où a est un réel.a) Déterminer les 2 valeurs de a pour lesquelles P admet une racine réelle.b) On prend pour a la plus petite valeur trouvée ci-dessus; décomposer alors la fraction $\frac{1}{P \cdot \bar{P}}$ sur $\mathbb{R}$.Exercice III : On considère l'équation du 3° degré : $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1)où a, b et c sont des réels.1°) Trouver h tel que : $y = x + h$ vérifie l'équation $y^3 + py + q = 0$ (2).

On ne s'intéressera plus maintenant qu'à cette forme.

2°) a) Dans (2), on pose $y = u + v$ et on impose à u et v la relation supplémentaire $3uv + p = 0$. Montrer que, si $u_1 = u^3$ et $v_1 = v^3$, alors u_1 et v_1 sont solution d'une équation du 2° degré que l'on précisera.b) Dans le cas où : $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0$, donner l'expression des 3 racines de (2) (on utilisera les nombres j et j^2 et on n'oubliera pas d'utiliser la relation $3uv + p = 0$).c) Résoudre les équations : i) $x^3 + 12x + 39 = 0$ ii) $x^3 - 15x - 4 = 0$ On donnera les expressions sous forme de radical (les résultats numériques pourront être donnés mais ne seront pas notés !). Dans le ii) il faudra résoudre sur $\mathbb{C}$: $u^3 = a$, on cherchera u à la machine (module et argument) et on vérifiera que $u \in \mathbb{Z}(i)$.Exercice IV : 1°) Démontrer les formules :

$$C = \cos a + \cos(a+h) + \dots + \cos(a+(n-1)h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \cdot \cos(a + (n-1)\frac{h}{2})}{\sin \frac{h}{2}}$$

$$S = \sin a + \sin(a+h) + \dots + \sin(a+(n-1)h) = \frac{\sin \frac{h}{2} \cdot \sin(a + (n-1)\frac{h}{2})}{\sin \frac{h}{2}}$$

2) On considère les deux sommes : $x = \cos 3a + \cos 5a + \cos 7a + \cos 11a$ $y = \cos a + \cos 9a + \cos 13a + \cos 15a$ où $a = \pi/17$.Calculer $x + y$ et xy ; en déduire les valeurs de x et de y exprimées à l'aide de radicaux carrés. On pose ensuite $z = \cos 3a + \cos 5a$ $t = \cos 7a + \cos 11a$ $u = \cos a + \cos 13a$ $v = \cos 9a + \cos 15a$.Calculer zt et uv . En déduire les valeurs de z, t, u, v .Deduire enfin de ce qui précède la valeur de $\cos \pi/17$ exprimée par radicaux carrés.