

Consignes du devoir

I. $f = \frac{1}{7x} - \frac{1}{7(x+1)} - \frac{1}{7(x^2+x+1)^2} + \frac{1}{7(x^2+x+1)}$ (cf Rivaud).

$$g = \frac{2x+7}{3(x^2+x+1)} - \frac{1}{6(x-1)} + \frac{9+\sqrt{3}}{156(x-\sqrt{3})} + \frac{9-\sqrt{3}}{156(x+\sqrt{3})}$$

$$h = 1 + \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1} + \frac{-x+3}{x^2-x+1}$$

II. a). Si $x \in \mathbb{R}$ et $P(x) = 0$ alors : $2x^3 - 9x^2 + 2x + a = 0$ partie réelle
 et $-8x^2 + 20x - 8 = 0$ partie imaginaire.
 $\Rightarrow x = 1/2$ ou $x = 2$ et $a = 1$ ou $a = 16$

b). $a = 1 \Rightarrow P = (2x-1)(x-(3+2i))(x-(1+2i)) \Rightarrow P\bar{P} = (2x-1)^2(x^2-6x+13)(x^2-2x+5)$

$$\frac{1}{P\bar{P}} = \frac{1/6}{607(2x-1)^2} + \frac{-29x+16}{33620(x^2-6x+13)} + \frac{-19x+20}{5780(x^2-2x+5)} + \frac{2016}{(697)^2(2x-1)} \quad (1)$$

III. 1°. On a : $x = y - h$ et en remplaçant dans (1) et en annulant les termes en y^2 , on trouve $h = 9/3$

2°. a). En remplaçant dans (2), on trouve : $u^3 + v^3 = -q$ et on a aussi :
 $u^3 v^3 = -P^3/27$ d'où l'équation du 2^{ème} degré : $X^2 + qX - \frac{P^3}{27} = 0 \quad (3)$

b). $\Delta = q^2 + \frac{4P^3}{27} = 4\left(\frac{P^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right) > 0$

D'où les 2 racines de (3) : $u_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$ $v_1 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$

et l'expression de u et v de (2) : $y = j^{k/3} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} - j^{3-k/3} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \quad k \in \{0, 1, 2\}$
 (formules de Cardan).

c). i). $\frac{P}{3} = 4, \frac{q}{2} = 15 \Rightarrow y = j^0 \cdot 2^{1/3} - j^{3-0} \cdot 2^{5/3}$: racine réelle : $-1,914881$

ii). $\frac{P}{3} = -5, \frac{q}{2} = -2 : \Delta = -4 \times 11^2$ $u_1 = 2 + 11i$ $v_1 = 2 - 11i$
 Il faut résoudre : $u^3 = 2 + 11i = (2+i)^3 : u = j^k(2+i) \quad v = \bar{u} = j^{-k}(2-i)$

$\Rightarrow y_1 = 4, y_2 = -2 + \sqrt{3}, y_3 = -2 - \sqrt{3}$

IV. 1°. $C + iS = e^{ia} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} = e^{ia} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{i(a+(n-1)\frac{\theta}{2})} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$ c.q.f.d.

2°. $x + y = C$ ou : $h = 2a, n = 8. x + y = \frac{1}{2}$

$xy = 2C$ ou $a \leftarrow 2a \quad h \leftarrow 2a : xy = \frac{\sin 8a \cos 9a}{\sin a} = -1$ $\left. \begin{array}{l} x = (1 + \sqrt{17})^{1/4} \\ y = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \end{array} \right\}$

$zt = \frac{1}{2}xy = -\frac{1}{4} \Rightarrow$

$uv = \frac{1}{2}xy = -\frac{1}{4} \Rightarrow$

$$z = \frac{1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{8}$$

$$u = \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8}$$

On a : $\cos 13a = -\cos 4a$ d'où : $\cos a - \cos 4a = u$

et $z = \cos 3a + \cos 5a = 2\cos 4a \cos a \Rightarrow \cos a (-\cos 4a) = -\pi/2$

Donc, $\cos a$ est racine de
 l'équation : $X^2 - uX - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{17} = \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}}{16 + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$