

I. EXERCICES INDEPENDANTS:

n°4

1. a). Montrer que si $ab > 1$, $a > 0$ et $b > 0$ alors :

$$\operatorname{Arctg} a + \operatorname{Arctg} b = \operatorname{Arctg} \frac{a+b}{1-ab} + \pi.$$

b). Simplifier alors : $A = \operatorname{Arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{Arctg} 7 + \operatorname{Arctg} 3 + \operatorname{Arctg} 8$ 2. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \operatorname{Arctg} \frac{1+2x\sqrt{3}-x^2}{2(1+x^2)}$ a). Préciser le domaine de définition de f .b). Calculer $f'(x)$ et donner $\mathcal{D}_{f'}$: on obtiendra une expression que l'on peut simplifier en étudiant la position de x par rapport à $-\sqrt{3}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.c). En posant $u = 2 \operatorname{Arctg} x$, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de u . (On précisera, selon les valeurs de u , les différents cas).II. PROBLEME 1: dérivées $n^{\text{ièmes}}$.On pose $f(x) = \operatorname{Arctg} x$.1. Calculer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.2. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n , de degré n , ayant la parité de n , tel que : $\forall x \in \mathbb{R}; f^{(n+1)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}}$.
Quelle est la relation (A) liant $P_{n+1}(x)$, $P_n(x)$, $P'_n(x)$?Calculer le coefficient de x^n dans $P_n(x)$.3. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}; (1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$. En déduire la relation (B) liant $P_{n+1}(x)$, $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$.4. Utiliser (A) et (B) pour trouver les polynômes U , V et W tels que : $U(x)P''_n(x) + V(x)P'_n(x) + W(x)P_n(x) = 0$ (C).5. Utiliser (C) pour calculer les coefficients du polynôme P_n .
(On écrit : $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_{n-2p+2} x^{n-2p+2} + a_{n-2p} x^{n-2p} + \dots$). Calculer alors a_{n-2} , puis donner la relation liant a_{n-2p+2} et a_{n-2p} ; en déduire l'expression de a_{n-2p} en fonction de n et p .