

III. PROBLEME 2 : fonctions convexes.

1. Démontrer que si une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est monotone dans $]a, b[$, elle est réglée (i.e., elle admet une limite à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$).

2. Si $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$, on dit que f est convexe sur $[a, b]$ si $\forall (x_1, x_2) \in [a, b]^2, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

Exemple : montrer que : $f: x \mapsto x^2$ est convexe sur tout intervalle $[a, b]$.

3. Démontrer que si f est convexe dans $[a, b]$, alors, pour tout x_0 de $]a, b[$ la fonction h_{x_0} définie par $h_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante. (Il faut montrer que si $x < x'$ alors $h_{x_0}(x) \leq h_{x_0}(x')$: dans le cas où $x_0 < x < x'$, on écrit $x = \lambda x_0 + (1-\lambda)x'$ où $\lambda = \frac{x' - x}{x' - x_0} \in]0, 1[$. Dire rapidement ce qu'il faudrait faire dans les 2 autres cas : $x < x' < x_0$ et $x < x_0 < x'$). La réciproque est-elle vraie ? Démontrer que si f est convexe dans $[a, b]$ elle admet en tout point x_0 de $]a, b[$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite telles que : $f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$. (Donc elle est continue sur $]a, b[$).

4. Si $f \in \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R})$ alors : f convexe dans $[a, b] \Rightarrow f'$ croissante dans $]a, b[$. Réciproquement : si $f \in \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ alors : f' croissante $\Rightarrow f$ convexe dans $[a, b]$. Montrer enfin l'équivalence (si $f \in \mathcal{D}_2(]a, b[, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$):

$$f \text{ convexe dans } [a, b] \Leftrightarrow f'' \geq 0$$

Idée du barème :

I. 4 : 1°. 1 2°. 3

II. 7,5 : 1°. 1 2°. 1,5 3°. 1,5 4°. 1 5°. 2,5 ~~60/45~~

III. 8,5 : 1°. 1 2°. 1 3°. 3,5 4°. 3 ~~2,5~~