

Corrigé du devoir surveillé

I. 1 a). si a et b sont > 0 : $\text{Arctg} a + \text{Arctg} b \in]0, \pi[$.

si $ab > 1$: $\frac{a+b}{1-ab} < 0$: $\text{Arctg} \frac{a+b}{1-ab} \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$.

Comme ces 2 angles ont même tangente, ils sont égaux à $k\pi$ près. Vu leurs intervalles d'appartenance, $k=1$, on a bien l'égalité annoncée.

$$\left. \begin{array}{l} b). \frac{2}{3} \times 3 > 1 \Rightarrow \text{Arctg} \frac{2}{3} + \text{Arctg} 3 = -\text{Arctg} \frac{11}{3} + \pi \\ 7 \times 8 > 1 \Rightarrow \text{Arctg} 7 + \text{Arctg} 8 = -\text{Arctg} \frac{3}{11} + \pi \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{3\pi}{2}$$

2. a). Il faut: $-2(1+x^2) \leq 1+2\sqrt{3}-x^2 \leq 2(1+x^2) \Leftrightarrow (x\sqrt{3}-1)^2 \geq 0$ et $(x+\sqrt{3})^2 \geq 0$
donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

b). Après simplifications, on trouve: $f'(x) = \varepsilon \cdot \frac{2}{1+x^2}$ pour $x \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\sqrt{3}$.

avec: $\varepsilon = +1$ si $-\sqrt{3} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\varepsilon = -1$ si $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou si $x < -\sqrt{3}$.

c). Si $u = 2 \text{Arctg} x$: on a: $\frac{1+2x\sqrt{3}-x^2}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2} \cos u + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin u = \sin(u + \frac{\pi}{6})$

D'où, en étudiant la position de $u + \frac{\pi}{6}$ / à $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$:

u	$-\pi < u \leq -\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3} < u < \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} < u < \pi$
$f(u)$	$-u - \frac{7\pi}{6}$	$u + \frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6} - u$

II. 1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$; $f''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}}$; $f^{(4)}(x) = \frac{6x^3+9x}{(1-x^2)^{7/2}}$; $f^{(5)}(x) = \frac{24x^4+72x^2+9}{(1-x^2)^{9/2}}$.

2. cf T.P. (!). On trouve: (A): $P_{n+1} = (1-x^2)P_n' + (2n+1)xP_n$.

Si $\deg P_n = n$: $P_n = a_n x^n + R_n$ avec $\deg R_n \leq n-1$, alors: si on pose: $P_{n+1} = a_{n+1} x^{n+1} + R_{n+1}$

on trouve: $a_{n+1} = -n a_n + (2n+1)a_n = (n+1)a_n$ et comme $a_0 = 1, a_1 = 1$, alors: $a_n = n!$

Donc: $a_n \neq 0 \Rightarrow \deg P_{n+1} = n+1$.

Ensuite, il faut montrer que: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$: par récurrence.

3. On applique la formule de Leibniz à $(1-x^2)f'(x) - x f(x) = 0$

$$\Rightarrow (B): P_{n+1}' = +n^2(1-x^2)P_{n-1}' + (2n+1)xP_n'$$

4. (A) et (B) $\Rightarrow P_n' = n^2 P_{n-1}$: d'où: $P_{n-1} = \frac{1}{n^2} P_n'$ et $P_{n-2} = \frac{1}{n^2(n-1)^2} P_n''$.

En écrivant (B) à l'ordre $n-1$: on a:

$P_n - (2n+1)x P_{n-1} - n^2(1-x^2)P_{n-2} = 0$ et en utilisant les relations trouvées:

$$(C): n^2 P_n - (2n-1)x P_n' - (1-x^2)P_n'' = 0$$

$$5. P_n = a_n x^n + \dots + a_{n-2p+2} x^{n-2p+2} + a_{n-2p} x^{n-2p} + \dots \quad \times n^2$$

$$P_n' = n a_n x^{n-1} + \dots + (n-2p+2) a_{n-2p+2} x^{n-2p+1} + (n-2p) a_{n-2p} x^{n-2p-1} + \dots \quad \times -(2n-1)x$$

$$P_n'' = n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots + (n-2p+2)(n-2p+1) a_{n-2p+2} x^{n-2p} + (n-2p)(n-2p-1) a_{n-2p} x^{n-2p-2} + \dots \quad \times x^2 - 1$$

En écrivant que la somme des termes de degré $n-2p$ est nulle, on obtient la relation:

$$\left. \begin{array}{l} a_{n-2p} = \frac{(n-2p+2)(n-2p+1)}{4p^2} a_{n-2p+2} \\ a_{n-2p+2} = \frac{(n-2p+4)(n-2p+3)}{4(p-1)^2} a_{n-2p+4} \\ \vdots \\ a_{n-2} = \frac{n(n-1)}{4} a_n \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$a_{n-2p} = \frac{n!}{(n-2p)! 4^p (p!)^2} a_n \text{ d'où.}$$

$$a_{n-2} = \frac{(n!)^2}{(n-2p)! 4^p (p!)^2}$$