

III. 1°) f convexe (fonctions continues monotones).

2°) Il suffit de montrer: $\forall \lambda \in [0,1]: \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2 - (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ (vérifié!).

3°) Dans le cas où: $x_0 < x < x'$: $\lambda = \frac{x' - x}{x' - x_0} > 0$ et $\lambda < 1$ et en utilisant la convexité de f , on a: $f(x) \leq \frac{x' - x}{x' - x_0} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x' - x_0} f(x') \Leftrightarrow h_{x_0}(x) \leq h_{x_0}(x')$.

Si x' est entre x et x_0 , on écrit: $x' = \lambda x_0 + (1-\lambda)x$ avec $\lambda = \frac{x' - x}{x_0 - x}$.
et enfin, si $x < x_0 < x'$: $x_0 = \lambda x + (1-\lambda)x'$ avec $\lambda = \frac{x' - x_0}{x' - x}$.

Réciproque: immédiate: on pose $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ avec $x_1 < x_2$.

et: $h_{x_0}(x_1) \leq h_{x_0}(x_2) \Leftrightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

Montrons que f admet une dérivée à gauche: avec $x < x_0 < x'$:

$h_{x_0}(x) \leq h_{x_0}(x')$ comme h_{x_0} est monotone, elle admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 ($h_{x_0}(x_0)$ n'est pas définie, mais si $x < x_0$, $\{h_{x_0}(x)\}$ est borné par $h_{x_0}(x')$). Or: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} h_{x_0}(x)$ existe $\Leftrightarrow f'_g(x_0)$ existe. On démontre de même que f admet une dérivée à droite.

4°) Si $x_1 < x_2$, montrons que $f'(x_1) \leq f'(x_2)$:

Soit $x_0 \in]x_1, x_2[$ alors, on a: $h_{x_0}(x_1) \leq h_{x_0}(x_0) \leq h_{x_0}(x_2)$ (Ici, on a prolongé h_{x_0} par continuité en x_0 en posant: $h_{x_0}(x_0) = f'(x_0)$).

Or: $h_{x_0}(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = h_{x_1}(x_0) \geq h_{x_1}(x_1)$ car $x_1 < x_0 \Rightarrow \underline{f'(x_1) \leq h_{x_0}(x_1)}$

de même, on a: $h_{x_0}(x_2) \leq f'(x_2)$ c.q.f.d.

Réciproque: Il faut et il suffit de montrer que h_{x_0} est croissante:

si $x < x_0 < x'$ alors: $h_{x_0}(x) = f'(x_1)$ avec $x_1 \in]x, x_0[$ (Th. des A.F.).

et $h_{x_0}(x') = f'(x_2)$ avec $x_2 \in]x_0, x'[$

$\Rightarrow h_{x_0}(x) \leq h_{x_0}(x')$.

si $x_0 < x < x'$ alors: $h_{x_0}(x') = \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{x' - x_0} + \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \cdot \frac{x' - x}{x' - x_0}$

i.e. $h_{x_0}(x') = \lambda h_{x_0}(x) + (1-\lambda)h_{x_0}(x')$

donc: $h_{x_0}(x') - h_{x_0}(x) = (1-\lambda)[h_{x_0}(x') - h_{x_0}(x_0)]$ (car $h_{x_0}(x) = h_{x_0}(x_0)$)

≥ 0 (d'après ce que l'on a fait ci-dessus)

$\Rightarrow h_{x_0}(x') \geq h_{x_0}(x)$

On procéderait de même dans le cas où: $x < x' < x_0$. c.q.f.d.

Si $f \in \mathcal{O}_2([a, b[, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a les équivalences:

f convexe dans $[a, b] \Leftrightarrow f' \nearrow \Leftrightarrow f'' \geq 0$. c.q.f.d.