

$$2^o) \quad g'(x) = -\frac{3}{5-4\cos x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \left(-\frac{3}{5-4\cos x} \right)_{x \rightarrow 0} = 0 \rightarrow (2p^o)$$

$g' \nearrow \Rightarrow g'' \geq 0$ concavité tournée vers les $y \geq 0$ (2p^o) π

Tableau de variation :

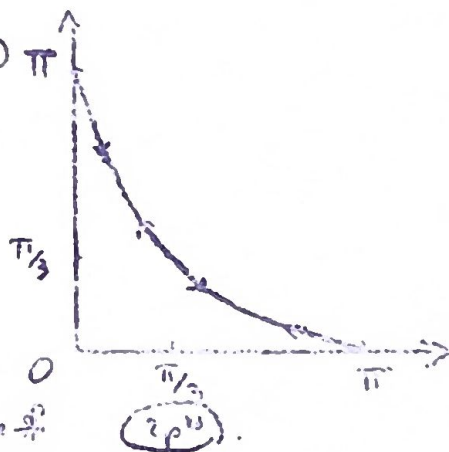
x	0	$\pi/3$	π
$g'(x)$	-3	-	$-\frac{1}{3}$
$g(x)$	π	$\pi/3$	$\rightarrow 0$

remarque :

$$g = g^{-1} \rightarrow (2p^o)$$

$$\rightarrow (3p^o)$$

$$(g^{-1})$$



3^o) a). Immédiat d'après le tableau de variation de g (2p^o).

$$b). f(z) = f(x) \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} = \frac{\sin z}{\sqrt{5-4\cos z}} \Leftrightarrow \text{on élève au carré (car les 2 quantités sont } \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \text{en ordonnant en fonction de } \cos z: (5-4\cos x)\cos^2 z - 4\cos z(1-\cos^2 x) + \cos x(4-5\cos x) = 0.$$

$$\text{On connaît 1 solution: } \cos x \text{ et le produit des racines est: } \cos x \cdot \frac{4-5\cos x}{5-4\cos x} : \text{ comme } \cos z \neq \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos z = \frac{4-5\cos x}{5-4\cos x} \Leftrightarrow z = g(x). \quad (6p^o)$$

$$c). \cos(x+z) = \cos x \cos z - \sin x \sin z = \frac{-2\cos^2 x + 4\cos x - 3}{5-4\cos x} \rightarrow (2p^o)$$

$$\text{de même: } \cos(x-z) = \frac{-8\cos^2 x + 4\cos x + 3}{5-4\cos x}$$

$$\text{Et, en utilisant les relations: } \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2 \frac{x+z}{2} = \frac{1+\cos(x+z)}{2} = \frac{1+\frac{-2\cos^2 x + 4\cos x - 3}{5-4\cos x}}{2}$$

$$\text{et } \cos^2 \frac{x-z}{2} = \frac{1+\cos(x-z)}{2} = \frac{1+\frac{-8\cos^2 x + 4\cos x + 3}{5-4\cos x}}{2} \rightarrow (3p^o).$$

On va montrer maintenant que $\cos \frac{x+z}{2}$ et $\cos \frac{x-z}{2}$ sont positifs :

$$\text{Sur } [0, \pi/3]: 0 \leq g(x) \leq \pi/3 \text{ et } \pi/3 \leq g(x) \leq \pi \Rightarrow$$

$$\text{or } \frac{x-g(x)}{2} = \frac{x-z}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \Rightarrow \cos \frac{x-z}{2} \geq 0$$

Pour $\cos \frac{x+g(x)}{2} \geq 0$: étudions $h(x) = x + g(x)$ sur $[0, \pi/3]$:

$$h'(x) = 1 + g'(x) = \frac{2(1-2\cos x)}{5-4\cos x}$$

x	0	$\pi/3$
$h'(x)$	0	0
$h(x)$	π	$2\pi/3$

$$\Rightarrow \frac{x+g(x)}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$$

$$\text{et donc: } \cos \frac{x+g(x)}{2} \geq 0.$$

$$\Rightarrow: \cos \frac{x+z}{2} = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \text{ et } \cos \frac{x-z}{2} = \frac{2\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \rightarrow (3p^o).$$

$$(8p^o)$$

4^o) a). Immédiat d'après le tableau de variation de f . (2p^o).

$$b). \text{ Comme: } \frac{x+z}{2} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}] \Rightarrow \text{ et que: } \cos \frac{x+z}{2} = f(x) \Rightarrow x+z = 2f(x)$$

$$\frac{z-x}{2} \in [0, \pi/2] \text{ et } : \cos \frac{z-x}{2} = 2f(x) \Rightarrow$$

$$z-x = 2\arccos(2f(x))$$

$$\Rightarrow x = \arccos f(x) - \arccos(2f(x))$$

$$\text{ou: } \varphi(y) = x = \arccos y - \arccos(2y). \quad (5p^o)$$