

EXERCICE:

Soit $T_n(x, y)$ le déterminant d'ordre n : $T_n(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & -y & \dots & -y \\ -x & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -x & \dots & -x & 1 \end{vmatrix}$

1°. En retranchant la 2^{ème} colonne à la 1^{ère},

montrer que les T_n vérifient : $T_n(x, y) = (1+y)T_{n-1}(x, y) - y(1+x)^{n-1}$ ($n \geq 1$).

2°. On veut montrer que $T_n(x, y) = \lambda(1+x)^n + \mu(1+y)^n$ si $y \neq x$.

a). Calculer a priori les valeurs de λ et μ .

b). En déduire l'expression de $T_n(x, y)$ ($y \neq x$).

3°. Déterminer : $\lim_{y \rightarrow x} T_n(x, y)$ puis calculer $T_n(x, x)$.

PROBLEME 1 :

A. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et sa matrice dans la base canonique : $F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1°. Déterminer les vecteurs invariants de f . On pose : e'_1 celui dont la composante sur e_1 est 1.

2°. On pose : $e'_2 = -e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_3$ (base canonique : $B = (e_1, e_2, e_3)$).

a). Vérifier que $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b). Donner la matrice de passage H de la base B à la base B' ainsi que son inverse H^{-1} .

c). Si λ désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice H dans la base B , montrer que λ est une symétrie vectorielle, déterminer ses éléments.

3°. a) Déterminer la matrice F' de f relative à la base B' .

b) Calculer, pour $n \geq 1$, F'^n , puis F^n .

B. On étudie les suites (p_n, q_n, r_n) définies par : $\begin{cases} p_n = 3p_{n-1} + q_{n-1} \\ q_n = r_{n-1} - 3p_{n-1} \\ r_n = p_{n-1} \end{cases}$ et $p_1 = 0, q_1 = 1, r_1 = 0$.

1°. On pose : $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$, trouver une relation simple entre X_n , F et X_{n-1} (où F est la matrice définie au A).

2°. Calculer X_n en fonction de X_1 et F .

3°. En déduire p_n, q_n, r_n ; que penser de la somme $p_n + q_n + r_n$?