

PROBLEME 2 :

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$: on pose : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on suppose : $\det A \neq 0$.

1°). A quelle condition sur A , nécessaire et suffisante, peut-on écrire :

$A = L.R$ où : $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix}$? Montrer que, si elles existent, L et R sont uniques et donner ℓ, r, s, t en fonction de a, b, c, d .

On dira, par la suite, qu'une matrice admet une décomposition $L.R$ si son déterminant est $\neq 0$ et si elle satisfait la condition obtenue ci-dessus.

2°) On suppose que A admet une décomposition $L.R$ avec : $A = L.R$. On pose :

$A_1 = R.L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$. Montrer que : i). A_1 est semblable à A

ii) $\det A_1 = \det A$ iii) A_1 et A ont les mêmes valeurs propres (racines de $\det(A - \lambda I) = 0$).

iv). $a_1 = a + d - \frac{\det A}{a}$, $b_1 = b$, $c_1 = \frac{\det A}{a^2} c$, $d_1 = \frac{\det A}{a}$ v) $a + d = a_1 + d_1$.

Dans la suite, on considère : $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$, $\det A_0 \neq 0$ et :
 si A_n admet une décomposition $L.R$ avec : $A_n = L_n R_n$ alors $A_{n+1} = R_n L_n$.
 si A_n n'admet pas de décomposition $L.R$, alors : $A_{n+1} = 0$.
 On pose : $\Delta = \det A_0 \neq 0$, $T = a_0 + d_0$, $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$.

3°). Montrer que $A_{n+1} = 0$ si : $a_n = 0$.

4°). Si $A_{n+1} \neq 0$, montrer que : $a_{n+1} = T - \frac{\Delta}{a_n}$, $b_{n+1} = b_n$, $c_{n+1} = \frac{\Delta}{a_n^2} c_n$, $d_{n+1} = \frac{\Delta}{a_n}$.

5°). En déduire que, si pour tout n de $\mathbb{N}$, $A_n \neq 0$ et si (a_n) est convergente, on a les propriétés : i). (b_n) et (d_n) convergentes ; ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$ sont les valeurs propres de A_0 .

6°). On suppose ici : $T = 0$, $a_0 \neq 0$, $\Delta \neq 0$; montrer qu'aucune des matrices

A_n n'est nulle et calculer explicitement A_n . A quelle condition les suites (a_n) , (b_n) , (c_n) , (d_n) sont-elles toutes convergentes ?

7°). Soit : $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calculer A_n pour $n \in [1, 4]$.

EXERCICE FINAL :

On suppose ; a, b, c et d tous (S) $\begin{cases} x_0 + a x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 = \alpha \\ x_0 + b x_1 + b^2 x_2 + b^3 x_3 = \beta \\ x_0 + c x_1 + c^2 x_2 + c^3 x_3 = \gamma \\ x_0 + d x_1 + d^2 x_2 + d^3 x_3 = \delta \end{cases}$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ distincts, résoudre alors (S) de 2 manières :

a). Avec les déterminants de Van der Monde.

b) Avec les polynômes de Lagrange.