

Exercices :

Corrigé des devoirs

$$1^{\circ}). T_n(x, y) = \begin{vmatrix} 1+y & -y & \dots & -y \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -x & \dots & -y \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (1+y) \cdot T_{n-1}(x, y) + (1+x) \begin{vmatrix} -y & \dots & -y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -x & \dots & -y \\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = (1+y) T_{n-1}(x, y) - y(1+x) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & -y \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

En (retrouvant) additionnant la 1^{ère} ligne multipliée par x aux autres lignes, on trouve

$$T_n(x, y) = (1+y) T_{n-1}(x, y) - y(1+x) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1+x & -y \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1+x \end{vmatrix} = (1+y) T_{n-1}(x, y) - y(1+x)^{n-1}$$

$$2^{\circ}). a). \text{ On a : } \begin{cases} T_1(x, y) = 1 = \lambda(1+x) + \mu(1+y) \\ \text{et } T_2(x, y) = 1-xy = \lambda(1+x)^2 + \mu(1+y)^2 \end{cases} \text{ système } \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{y}{y-x} & (x \neq -1, y \neq -1) \\ \mu = \frac{x}{x-y} \end{cases}$$

$$b). \text{ Montrons alors que : } T_n(x, y) = \frac{y(1+x)^n - x(1+y)^n}{y-x} : \text{ vrai pour } n=1 \text{ et } n=2.$$

$$\text{Hyp de réc. : } T_{n-1}(x, y) = \frac{y(1+x)^{n-1} - x(1+y)^{n-1}}{y-x} \text{ alors, en utilisant la relation du } 1^{\circ}, \text{ on peut conclure.}$$

3^o). En utilisant la règle de l'Hôpital (x fixé, $y \rightarrow x$) on en déduit :

$$\lim_{y \rightarrow x} T_n(x, y) = (1+x)^n - n(1+x)^{n-1}x. \text{ Or, on peut aussi montrer par récurrence, à partir de } T_1(x, x) = 1 \text{ que } T_n(x, x) = (1+x)^n - nx(1+x)^{n-1}.$$

Problème I :

$$A) 1^{\circ}). \text{ Vecteurs invariants de } f : f(\vec{x}) = \vec{x} : \text{ il faut résoudre } \begin{cases} 3x + y = x \\ -3x = y \\ x = z \end{cases} \Rightarrow y = x, y = -2x \Rightarrow e'_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$$

$$2^{\circ}). a). H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \det H \neq 0 \Rightarrow B' \text{ base.}$$

$$b). \text{ On trouve (aisément) : } H = H^{-1}$$

$$c). \text{ On a : } H = H^{-1} : h \text{ involution ; cherchons l'ensemble des vecteurs invariants :}$$

$$h(\vec{x}) = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} \text{ appartient au plan vectoriel : } x+y=0. (P)$$

$$h(\vec{x}) = -\vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} \text{ appartient à la droite vectorielle engendrée par } \vec{e}_3 - 2\vec{e}_2$$

$$\Rightarrow \text{ donc } h \text{ est une symétrie / au plan } (P) \text{ parallèlement au vecteur } \vec{e}_3.$$

$$3^{\circ}). a). F' = H F H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b). F' = I_3 + B \quad \text{et} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^3 = 0 \Rightarrow F'^n = I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$$

$$F'^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } F^n = H F'^n H = \begin{pmatrix} \frac{(n+1)(n+2)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} \\ -n(n+2) & -(n+1)(n-1) & -n(n-2) \\ \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\text{On vérifie que } F^0 = I_3 \text{ et } F^1 = F)$$

$$B) 1^{\circ}). \text{ On a : } X_n = F X_{n-1}$$

$$2^{\circ}). \text{ d'où : } X_n = F^{n-1} X_1$$

$$3^{\circ}). \downarrow$$

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n(n-1)}{2} & \frac{(n-1)n}{2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\ -(n-1)(n-1) & -n(n-2) & -(n-1)(n-3) \\ \frac{(n-1)n}{2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2} & \frac{(n-2)(n-3)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$p_n = \frac{(n-1)n}{2}$$

On remarque que :

$$q_n = -n(n-2)$$

$$p_n + q_n + r_n = 1$$

$$r_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$