

Problème 2:

1°. On a: $a = r$, $b = 0$, $c = r$, $d = r + t$: On a CNS car: $a \neq 0$

et dans ce cas, on a: $r = a$, $d = b$, $r = \frac{c}{a}$, $t = d - \frac{bc}{a} = \frac{ad - bc}{a}$. (L'immensité et R aussi).

2°. i). On a bien: $RL = P^{-1}LRP$ avec $P = R^{-1}$.

ii). $\det LR = \det RL$. iii). $\det(A - \lambda I) = \det(A_1 - \lambda I)$ car A_1 et A sont semblables. iv). et v) immédiats.

3°. Si $a_n = 0$, alors on pose $A_{n+1} = 0$; montrons que l'on ne peut avoir

$A_{n+1} = 0$ et $a_n \neq 0$: en effet: si $a_n \neq 0$: $\det A_{n+1} = \det A_n \neq 0 \Rightarrow A_{n+1} \neq 0$.

4°. cf. 2°. iv).

5°. i). $b_{n+1} = b_n$ donc (b_n) convergente. $d_{n+1} = \frac{\Delta}{a_n}$ donc, si (a_n) est convergente,

(d_n) est convergente: ($d_n = T - a_n$); ii) Si $\lim a_n = \lambda$ et $\lim d_n = \mu$, alors, on a

$\mu = \frac{\Delta}{\lambda}$ et $\mu + \lambda = T$ i.e. $\lambda\mu = \Delta$, $\lambda + \mu = T$ λ et μ sont racines de:

$X^2 - TX + \Delta = 0$ équation qui donne les valeurs propres de A .

6°. On a: $a_1 = -\frac{\Delta}{a_0}$, $b_1 = b_0$, $c_1 = \frac{\Delta \cdot c_0}{a_0^2}$, $d_1 = \frac{\Delta}{a_0} = -a_1$,

et $a_2 = a_0$, $b_2 = b_0$, $c_2 = c_0$, $d_2 = -a_0$, donc,

si n est pair: $A_n = A_0$ si n est impair: $A_n = A_1$.

Pour que les suites aient une limite, il faut et il suffit que $A_1 = A_0$, donc que: $c_0 = 0$.

7°. On trouve: $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{3} & 2 \\ 4\frac{1}{9} & 4\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{43}{11} & 2 \\ \frac{16}{121} & \frac{12}{11} \end{pmatrix}$ $A_4 = \begin{pmatrix} \frac{171}{23} & 2 \\ \frac{64}{1349} & \frac{44}{43} \end{pmatrix}$.

On montrerait que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice final:

a). $\Delta = (d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$; $\Delta_{x_0} = d \begin{vmatrix} b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \\ d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ c & c^2 & c^3 \\ d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$

... après des calculs (!!!), on trouve la même chose qu'en b).

+ $\delta \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$.

b). Si on pose: $P(X) = x_0 + x_1 X + x_2 X^2 + x_3 X^3$, il faut chercher P tel que:

$P(a) = d$, $P(b) = \beta$, $P(c) = \gamma$, $P(d) = \delta$, d'où, avec les polynômes de Lagrange:

$$P = d \cdot \frac{(X-b)(X-c)(X-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \beta \cdot \frac{(X-a)(X-c)(X-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \gamma \cdot \frac{(X-a)(X-b)(X-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \delta \cdot \frac{(X-a)(X-b)(X-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{-d b c d}{(a-b)(a-c)(a-d)} - \frac{\beta a c d}{(b-a)(b-c)(b-d)} - \frac{\gamma a b d}{(c-a)(c-b)(c-d)} - \frac{\delta a b c}{(d-a)(d-b)(d-c)}; x_1 = \frac{d(b+c+d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{\beta(a+c+d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$

$$+ \frac{\gamma(a+b+d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{\delta(a+b+c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}; x_2 = \frac{-d(b+c+d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} - \frac{\beta(a+c+d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} - \frac{\gamma(a+b+d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} - \frac{\delta(a+b+c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$\text{et enfin, le plus simple: } x_3 = \frac{d}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{\beta}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{\gamma}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{\delta}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$