

PROBLEME 1 :

Soit f une fonction réelle de classe C^∞ (i.e. à dire ayant des dérivées de tout ordre) sur $\mathbb{R}$. On lui associe la fonction réelle φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(0) = f(0)$ et $\varphi(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{+x} f(t) dt$.

1°. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2°. Déterminer φ dans les cas suivants : i) $f(t) = t e^t$

ii) $f(t) = \frac{t-1}{t^2-t+1}$ iii) $f(t) = \frac{1}{1+\sin^2 t}$ ($x \in]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$)

3°. Étudier la parité de φ .

4°. La correspondance $f \mapsto \varphi$ définit une application J de l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dans l'ensemble $\mathcal{P}_0$ des fonctions paires, définies et continues sur $\mathbb{R}$. J est linéaire : quel est son noyau ? Montrer que pour tout élément de $\mathcal{C}$, il existe une seule fonction paire, $\hat{f}$, appartenant à $\mathcal{C}$ telle que $J(f) = J(\hat{f})$.

5°. Montrer que φ est C^∞ (Utiliser $G: x \mapsto \int_0^x \hat{f}(t) dt$). Exprimer $\varphi^{(n)}(0)$ en fonction de $f^{(n)}(0)$.

6°. Montrer que l'application J restreinte à $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \cap \mathcal{C}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur lui-même.

7°. On suppose : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$, montrer que φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

PROBLEME 2 : NB : B et C indépendants mais A est nécessaire à B et C .

A. Ici a est un réel strictement positif.

1°. Étudier, suivant les valeurs de a l'existence de $I_n(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{a - \cos t} dt$

2°. Désormais $a > 1$: calculer $I_0(a)$ et $I_1(a)$.

3°. Pour $n \geq 2$, calculer $I_n(a) + I_{n-2}(a)$ en fonction de $I_{n-1}(a)$.

4°. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de $I_n(a)$ en fonction de n et de a . Montrer que si $\alpha = \text{Arg} a$, alors $I_n(a) = \frac{2\pi e^{-n\alpha}}{\sin \alpha}$.

Donner la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.