

B. 1°). Calculer u_n et v_n où : $u_n = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ax} \cos nx dx$ et $v_n = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ax} \sin nx dx$.

2°). Calculer les limites de u_n et v_n , $n \rightarrow +\infty$.

3°). Soit $J_n(p) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos t}{1+p^2-2p\cos t} dt$, où p est un réel positif, avec $p \neq 0$ et $p \neq 1$. Justifier l'existence de $J_n(p)$ et calculer $J_n(p)$ en distinguant les 2 cas : $p < 1$ et $p > 1$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(p)$.

4°). Soit f une fonction deux fois dérivable et à dérivée seconde continue sur $[-\pi, +\pi]$. On pose : $K_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx$. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = 0$. Quels sont les résultats du A et du B que cela permet de retrouver.

C. On pose : $f(p, \theta) = |1-p^2| \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos^2 t}{p^2+1-2p\cos(t-\theta)} dt$ où p est un réel strictement positif, $p \neq 1$ et θ un réel quelconque.

1°). Montrer que : si g est continue et périodique, de période T , alors l'intégrale : $\int_x^{x+T} g(t) dt$ est indépendante de x , et que, si, de plus, g est une fonction impaire, l'intégrale précédente est nulle.

2°). Montrer que $f(p, \theta)$ a un sens et peut être exprimée en fonction de θ et de certaines intégrales $I_n(a)$ du A (pour des valeurs de n et de a que l'on précisera).

3°) En déduire, en distinguant les 2 cas : $p < 1$ et $p > 1$, une expression simple de $f(p, \theta)$.