

Pb I.

Continuité du sinus inversé

1°) f est continue sur $\mathbb{R}^0$ comme quotient de fonctions continues. En 0, en utilisant la th. de la moyenne: $\{f(x) \mid x \in]-\epsilon, \epsilon[\Rightarrow f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$, f admet une limite: $f(0)$.

2°) i). $\Psi(x) = \operatorname{ch} x - \frac{\sinh x}{x}$ (i) $\Psi(x) = \frac{1}{2x} \left[\frac{1}{2} \log \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2} \left[\operatorname{Arctg} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} + \operatorname{Arctg} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right] \right]$

(ii) pour $x \neq 0$: $\Psi(x) = \frac{1}{2x} \operatorname{Fhtg}(\sqrt{1+x^2})$; si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $x = \operatorname{Arctg} u$ avec $u \in]-\infty, \infty[$

$\Rightarrow \Psi(x) = \frac{1}{2x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+u^2 \sin^2 t} + \frac{1}{2x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+u^2 \cos^2 t}$

$= \frac{1}{2x} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+u^2 \sin^2 t}$ car $\frac{1}{1+u^2}$ est périodique et $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+u^2} = \frac{\pi}{1+u^2}$

d'où: $\Psi(x) = \frac{1}{2x} \left[\operatorname{Fhtg}(\sqrt{1+x^2}) + \pi \right]$ car $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+u^2}$

3°) Ψ est paire.

4°) $\operatorname{Ker} J = \{f, \forall x \in \mathbb{R}^0: \int_0^x f(t) dt = 0\}$ si on pose: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ alors: $F(x) = 0$

donc f est paire $\Rightarrow f$ impaire: la réciproque est immédiate; donc:

$\operatorname{Ker} J = \{f \in \mathcal{E}^0, f \text{ impaire}\}$.

On peut écrire: $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \Rightarrow J(f) = J\left(\frac{1}{2}(f(x) + f(-x))\right)$

Si on pose: $\hat{f}(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ paire $\hat{f}$ est bien impaire. L'unique fonction paire de $\mathcal{E}^0$

$J(\hat{f}) = J(f)$ (si il en existait une deuxième, elle serait ~~pair~~ paire et $\hat{f}, g$ serait une fonction paire et impaire donc, nulle).

5°) $\Psi(x) = \frac{1}{2x} [G(x) - G(-x)]$ sur $\mathbb{R}^0$, Ψ est le rapport de fonctions indéfiniment dérivables, il faut montrer que Ψ admet des dérivées de tout ordre en 0.

En utilisant le D.L. de Taylor pour Ψ , on a: $\Psi(x) = G'(0) + \frac{x^2}{2} G''(0) + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} G^{(2n)}(0) + \dots$

or: $G'(0) = \hat{f}(0) \Rightarrow \Psi(x) = \hat{f}(0) + \frac{x^2}{2} \hat{f}''(0) + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \hat{f}^{(2n)}(0) + \dots$

donc, $\Psi^{(n)}(0) = \frac{1}{2(n)} \hat{f}^{(2n)}(0) = \frac{1}{2(n)} \hat{f}^{(2n)}(0)$ et $\Psi^{(n)}(0) = 0$.

que l'on peut rassembler en: $\Psi^{(n)}(0) = \frac{1}{2(n)} \hat{f}^{(2n)}(0) (1 + (-1)^n)$ (voir!).

6°) Grâce au 5° on sait que $J(\hat{f}) \in \mathcal{E}$ et $\hat{f} \in \mathcal{E}^0 \Rightarrow J(\hat{f}) \in \mathcal{E}$ donc,

$J(f) \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}^0$ (car si $f \in \mathcal{E}^0$, $\hat{f} = f$). Just injective grâce au 4°, il

faut montrer que J est bijective.

Or: $\Psi'(x) = \frac{1}{x} \hat{f}(x) - \frac{1}{x^2} \Psi(x) \Rightarrow \hat{f}(x) = \Psi(x) + x \Psi'(x)$, donc,

$J^{-1}: \Psi \mapsto J^{-1}(\Psi) = \hat{f} = \Psi(x) + x \Psi'(x)$ q.e.d.

7°) On a: $\Psi(x) = \frac{1}{2x} \int_0^x \hat{f}(t) dt \Rightarrow \Psi'(x) = \frac{1}{2x} \left[2 \hat{f}(x) - \int_0^x \hat{f}(t) dt \right] = \frac{1}{x} \left[\hat{f}(x) - \int_0^x \hat{f}(t) dt \right]$

$\hat{f}(x)$ est le signe de $g(x)$ car: $g(x) = 2 \hat{f}(x)$: produit de fct. croissantes donc $\hat{f}$ croissant $g(x) = 0 \Rightarrow g'(x) \geq 0 \Rightarrow g$ n'a de zéro que $g(0) = 0 \Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow \Psi' \geq 0 \Rightarrow g \geq 0$ q.e.d.

Pb II:

A. 1°) si $a > 1$ pas de pb., on intègre une fonction continue

si $a \leq 1$, $\exists \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $a = \cos \alpha \Rightarrow a \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 0)$

$\Rightarrow a \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\cos 2x + 1)$ (si $a \neq 0$) $\Rightarrow \frac{\cos 2x}{2} = a \cos x - \frac{1}{2}$ car $a \cos x = 0$