

Si $\cos \theta = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = 0$ (car $\cos$ borné) et donc $I_n \rightarrow 0$.
 Si $\cos \theta \neq 0$, l'intégrale converge.

En résumé, si $0 < \theta < \pi$, $I_n(\theta)$ existe. Si $0 < \theta < \pi$, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, l'intégrale diverge, et si $\theta = \frac{\pi}{2}$, l'intégrale converge.

2°) $I_0(a) = 2 \int_0^{\pi} \frac{dt}{a - \cos t}$ et on pose $u = \frac{1}{2} \left(t - \frac{\pi}{2} \right)$. $I_0(a) = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{a - \cos(2u)} = \frac{4}{\sqrt{a^2-1}} \left[\arctan \frac{\sqrt{a^2-1} \tan u}{1 - a \tan^2 u} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

(avec $v = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} \cdot u$) $\Rightarrow I_0(a) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

$I_1(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{a - \cos t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (-1) dt + a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a - \cos t} = -2\pi + a I_0(a) = I_0(a - \sqrt{a^2-1})$.

3°) $I_n(a) + I_{n-1}(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2 \cos t \cdot (-1)^n \cos t}{a - \cos t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2 \cos(n-1)t}{a - \cos t} dt + 2a I_{n-1}(a)$

d'où: $I_n(a) + I_{n-1}(a) = 2a I_{n-1}(a)$.

4°) On a une suite récurrente double: on trouve $I_n(a) = [a - \sqrt{a^2-1}]^n \cdot I_0$

et, avec $a = \cosh \alpha$, $\alpha > 0$, $I_n(a) = \frac{2\pi e^{-n\alpha}}{2\sinh \alpha} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) = 0$.

B) 1°) (ours) $\Rightarrow u_n = \frac{e^{2n}}{a^2 + n^2} [a \cos n\pi + n \sin n\pi]$ et $v_n = \frac{e^{2n}}{a^2 + n^2} [a \sin n\pi - n \cos n\pi]$

2°) $\lim u_n = \lim v_n = 0$. $u_n = \frac{2a}{a^2 + n^2} \cos(n\pi) (-1)^n$ et $v_n = -\frac{2n}{a^2 + n^2} \sin(n\pi) (-1)^n$

3°) On a $I_n(p) = \frac{1}{2p} I_n\left(\frac{1+p^2}{2p}\right)$ or: $\frac{1+p^2}{2p} > 1$ donc, I_n existe.

$I_n(p) = \frac{1}{2p} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{1+p^2}{2p}\right)^2 - 1}} \cdot \left[\frac{1+p^2}{2p} - \sqrt{\left(\frac{1+p^2}{2p}\right)^2 - 1} \right]^n = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-p^2} p^n & \text{si } p < 1 \\ \frac{2\pi}{p^2-1} \frac{1}{p^n} & \text{si } p > 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ si $p > 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(p) = 0$ si $p < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(p) = 0$

4°) $K_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \left[\frac{1}{n} f(x) \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx$

ce permet de retrouver les lim de A 4°, de B 2° et de B 3°.

C) 17. Si G est une primitive de g , alors: $\int_n^{n+\pi} g(x) dx = G(n+\pi) - G(n) = H(n)$

Or $H'(n) = 0 \Rightarrow H$ est constante.

Si g est impaire, alors: $\int_n^{n+\pi} g(x) dx = \int_{-n/2}^{n/2} g(x) dx = 0$.

2°) $f(p, \theta)$ a un sens car $p^2 + 1 - 2p \cos(\theta)$ ne s'annule pas.

En faisant le changement de variable: $u = t - \theta$ on a:

$f(p, \theta) = (1-p^2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2(u+\theta)}{p^2 + 1 - 2p \cos u} du = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(u+\theta) du}{p^2 + 1 - 2p \cos u} \times (1-p^2)$ à cause du 1°).

Or $\cos^2(u+\theta) = \frac{\cos(2u+2\theta)+1}{2} = \frac{1}{2} [\cos 2u \cos 2\theta + \sin 2u \sin 2\theta + 1]$
 impaire, donc, on intègre $\cos 2u$.

$\Rightarrow f(p, \theta) = (1-p^2) \cdot \frac{1}{2} [I_0(p) + \cos 2\theta \cdot I_2(p)]$

$\Rightarrow$ si $p < 1$: $f(p, \theta) = \pi [1 + p^2 \cos 2\theta]$

$p > 1$: $f(p, \theta) = \pi \left[1 + \frac{1}{p^2} \cos 2\theta \right]$