HX 5 Corrigé du dessin

Exercice 1.

1°/. $x'(t) = -3\,\dfrac{2t^3+t^2+1}{(t^3-1)^2}$

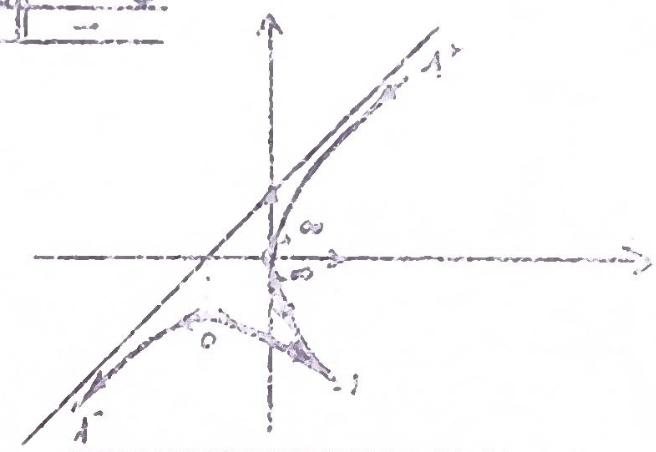
$y'(t) = -3t\,\dfrac{t^3+t+2}{(t^3-1)^2}$ $\Rightarrow$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x'		+	0	−		−	‖	−	
x	0	↗		↘	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
y	0	↘	2	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0
y'		−	0	+	0	−	‖	−	

2°/. $y - x - 1 = -\dfrac{(t-1)^2}{t^2+t+1} < 0$

$\Rightarrow$ la courbe est toujours en dessous de l'asymptote : $y = x+1$.

3°/.



Exercice 2 :

1°/. $Y - y = -\dfrac{x}{y}(X - x)$ équation de la droite $\perp$ à $\overrightarrow{OM}$ passant par M

$Y = -\dfrac{y}{x} X$ équation de D_M

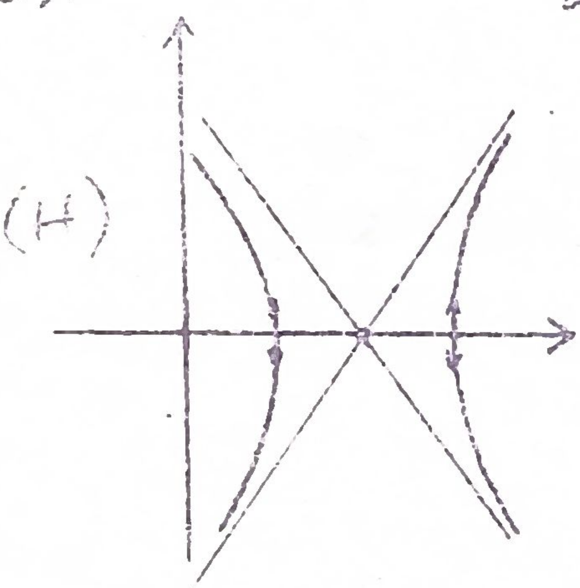
$\Rightarrow \boxed{x' = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,x \qquad y' = \dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\,y}$ (1)

Or : $\theta' = -\theta$ et (1) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} r'\cos\theta' = \cos 2\theta \cdot r\cos\theta \\ r'\sin\theta' = -\cos 2\theta \cdot r\sin\theta \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} r' = \cos 2\theta \cdot r \\ \theta' = -\theta . \end{array}}$

2°/.

a).

(H)

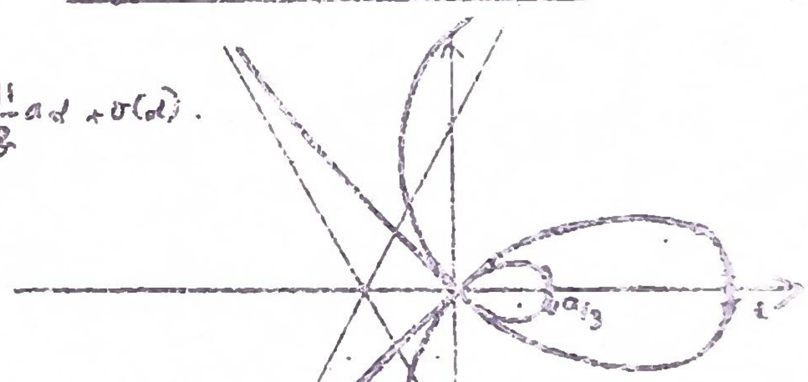


b). $r' = a\,\dfrac{\cos 2\theta}{2\cos\theta - 1}$ $\Rightarrow$

θ	0		$\pi/4$		$\pi/3$		$3\pi/4$		π
r	a	+	0	−	‖	+	0	−	$-a/3$

avec $\alpha = \theta - \pi/3$

$r\sin\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}a + \dfrac{11}{12}a\alpha + o(\alpha)$.



$a/3$

pas de p^ts doubles sauf en O.

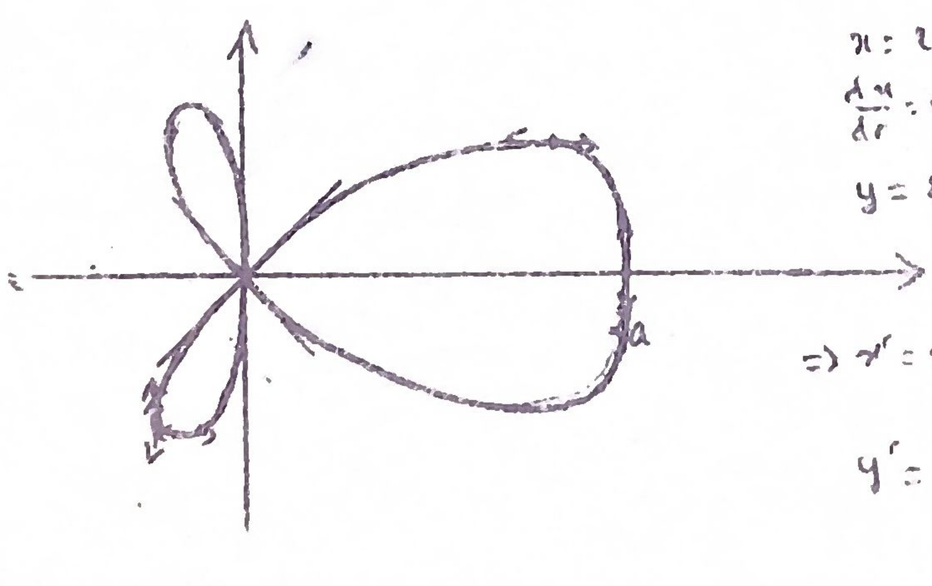
3°/. Equation du cercle : $r = 2a\cos\theta$

$\Rightarrow r' = 2a\cos\theta'\cos 2\theta'$.

θ'	0		$\pi/4$		$\pi/2$
r'		+	0	−	0

$r'(\theta'+\pi) = -r'(\theta')$ étude sur $[\pi]$ et $r'(-\theta') = r'(\theta')$

$\Rightarrow$ étude sur $[0, \pi/2]$ + sym. / Ox.



p^ts où les tangentes sont // à l'un des axes :

$x = 2a\cos^2\theta\cos 2\theta = 2a\,t(2t-1)$ avec $t = \cos^2\theta$

$\dfrac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \cos\theta = \pm\dfrac{1}{2}$;

$y = 2a\cos\theta\sin\theta\cos 2\theta = \dfrac{a}{2}\sin 4\theta$

$\dfrac{dy}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \cos 4\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/8,\ \dfrac{3\pi}{8}$

$\Rightarrow x' = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a/4 \\ -\frac{a}{4}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ + sym / Ox

$y' = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a\frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{a\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$ + sym / Ox