

EXERCICE 1 : 14

Soit E l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme $T : f \in E \mapsto T(f) \in E$ défini par : $T(f)(x) = f'(x) + x f(x)$.

1°) Trouver l'expression générale des fonctions f appartenant au noyau de T (i.e. : vérifiant $T(f) = 0$). 2

2°) Si $f \in E$, expliciter $T^2(f)(x)$. En déduire les solutions de l'équation différentielle : $y'' + 2xy' + (x^2+1)y = 0$ (on rappelle la propriété suivante : $T^2(f)(x) = 0 \Leftrightarrow T(f)(x) \in \text{Ker } T$). T^2 désigne l'application linéaire $T \circ T$. 4

3°) Donner la solution générale de l'équation $T^n(f) = 0, n \in \mathbb{N}^*$. 8

EXERCICE 2 : 18

1°) Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'équation : $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Donner l'équation différentielle vérifiée par $\Delta = y_1 y_2' - y_1' y_2$. 2

2°) On considère par la suite l'équation : $y'' + b(x)y = 0$ (1).

a) Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de (1), montrer que la fonction $u = y_1 y_2$ est solution de l'équation : $2uu'' - u'^2 + 4u^2 b(x) = A$ où A est une constante que l'on précisera en fonction des conditions initiales : $y_1(0) = a_1, y_1'(0) = b_1, y_2(0) = a_2, y_2'(0) = b_2$. 7

b) Comment se transforme A si on remplace y_1 par $Y_1 = \alpha y_1 + \beta y_2$ et y_2 par $Y_2 = \gamma y_1 + \delta y_2$? Préciser les relations entre α, β, γ et δ pour que A ne change pas. 4

c) Donner des solutions de l'équation :

$$2uu'' - u'^2 + 4u^2 = -1.$$
5