

Exercice 1:

1°. Il faut résoudre $y' + xy = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = C e^{-x^2/2}}$

2°. On a: $T^2(f)(x) = y'' + 2xy' + (x^2+1)y = 0$ (avec $y = f(x)$)

On: $T^2(f) = 0 \Leftrightarrow T(f) \in \text{Ker } T \Leftrightarrow f'(x) + x f(x) = C e^{-x^2/2}$

En faisant varier la constante on trouve:

$\boxed{f \in \text{Ker } T^2 \Leftrightarrow f(x) = (C_1 x + C_0) e^{-x^2/2}}$

3°. On fait l'hypothèse de récurrence $\boxed{T^n(f) = 0 \Leftrightarrow f(x) = P_n(x) e^{-x^2/2}}$ où

P_n est un polynôme de degré au plus égal à $n-1$. (Vérifié à l'ordre 1 et 2).

à l'ordre $n+1$: $T^{n+1}(f) = 0 \Leftrightarrow T^n(f) \in \text{Ker } T \Leftrightarrow f'(x) + x f(x) = P_n(x) e^{-x^2/2}$

On cherche alors $f(x)$ sous la forme: $f(x) = z(x) e^{-x^2/2}$

$f'(x) = z'(x) e^{-x^2/2} - z(x) x e^{-x^2/2}$

$\Rightarrow z' = P_n \Rightarrow z = P_{n+1}$ où P_{n+1} est un polynôme de degré au plus égal à n . c.q.f.d.

Exercice 2:

1°. $\Delta'(x) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = -a(x) \Delta(x) \Leftrightarrow \boxed{\Delta'(x) + a(x) \Delta(x) = 0}$

2°. a). On trouve: $2uu'' - u'^2 + 4u^2 b(x) = -y_1^2 y_2'^2 - y_2^2 y_1'^2 + 2y_1 y_1' y_2 y_2'$
 $= -\Delta^2$

Comme $a(x) = 0 \Rightarrow \Delta' = 0$ donc Δ est constant $\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix}$

D'où: $\Delta = a_1 b_1 - a_2 b_2 \Rightarrow$

$\boxed{2uu'' - u'^2 + 4u^2 b(x) = -(a_1 b_1 - a_2 b_2)^2}$

b). On a: $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_1 = (\alpha\delta - \gamma\beta)^2 A$ et pour que $A_1 = A$, il faut

et il suffit que: $\alpha\delta - \gamma\beta = \pm 1$

c). Dans ce cas: $A = 1$ et y_1 et y_2 sont solutions de: $y'' + y = 0$

Donc on a: $y_1 = a_1 \cos x + b_1 \sin x$ où $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ sont les conditions initiales.
 $y_2 = a_2 \cos x + b_2 \sin x$

Si $a_1, a_2 \neq 0$, alors: $y_1 = a_1 [\cos x + \lambda \sin x]$ avec $\lambda = \frac{b_1}{a_1}$, $\mu = \frac{b_2}{a_2}$

$y_2 = a_2 [\cos x + \mu \sin x]$ et $\mu - \lambda = \frac{\pm 1}{a_1 a_2}$

$\Rightarrow u = a_1 a_2 [\cos x + \lambda \sin x] [\cos x + \mu \sin x] = \pm \frac{\cos^2 x + \lambda \mu \sin^2 x + (b_1 + \mu) \cos x \sin x}{\mu - \lambda}$