

1°). Solution de l'équation homogène: $y = \frac{C}{\sqrt{x(x-4)}}$

En faisant varier la constante, on trouve: $\sqrt{x(x-4)}$

$$C = 2 \int \frac{\sqrt{x(x-4)}}{x(x-4)} dx \quad \text{En posant } x-2=2t \text{ et en distinguant les cas,}$$

on obtient: $x < 0: C = 2 \operatorname{Argch} \frac{2-x}{2} + K_1 = 4 \operatorname{Argch} \frac{\sqrt{x}}{2} + K_1$

$$4 > x > 0: C = -2 \operatorname{Arccos} \frac{2-x}{2} + K_2 = -4 \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{x}}{2} + K_2$$

$$x > 4: C = -2 \operatorname{Argch} \frac{x-2}{2} + K_3 = -4 \operatorname{Argch} \frac{\sqrt{x}}{2} + K_3$$

D'où les valeurs de y dans les différents cas.

2°). Pour que la solution soit définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, il faut et il suffit qu'elle soit continue en 4 $\Rightarrow K_2 = K_3 = 0$.

En utilisant la règle de l'Hôpital, on a alors: $\lim_{x \rightarrow 4^+} y = -1$.

Donc, la seule solution continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} -4 \operatorname{Arccos} \frac{\sqrt{x}}{2} & \text{si } x < 4 \\ -1 & \text{si } x = 4 \\ -4 \operatorname{Argch} \frac{\sqrt{x}}{2} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

A partir de ces formules, on trouve que la courbe se présente comme l'énonce le précise.

Exercice 4:

1°). Comme les vecteurs $\vec{OH}$ et $\vec{H'M}$ sont parallèles, il suffit d'exprimer que leurs abscisses sont égales.

Has obtenus comme ρ des droites: $\int y = -\frac{1}{y}, x$
 $y-y = y'(x-x) \Rightarrow -y = \frac{y-xy'}{1+y'^2}$

Equ. diff. $y(2+y'^2) - xy' = 0$

En posant $y' = t \Rightarrow y = x \frac{t}{1+t^2}$ et $dy = t dx \Rightarrow \boxed{x = \frac{Ct(2+t^2)}{(1+t^2)^{3/2}} \quad y = \frac{C}{(1+t^2)^{3/2}}}$

2°). On a: $\alpha'(t) = \cos(3\cos t - 1) \Rightarrow y' = \frac{y}{x} \Rightarrow (C_1)$ est la solution de l'équ. diff.

On étudie sur $[0, \pi/2]$ + symétries:

	0	$\frac{\pi}{2}$
α	+	-
β	+	-
γ	+	-
δ	+	-

3°). On a $ds = |3\cos^2 t - 1| dt$.

Compte tenu des symétries: $L(\alpha) = 4 \int_0^{\pi/2} ds = 4\sqrt{2} + 4 \operatorname{Argch} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$ds = \varepsilon(3\cos^2 t - 1) dt$$

$\vec{r} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \vec{r}' = \varepsilon \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad ds = \varepsilon dt \Rightarrow \vec{OP} = \vec{OR} + \vec{RN} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$
 ($R = \frac{ds}{dt} = \varepsilon(3\cos^2 t - 1)$) astéroïde

4°). Trajectoires orthogonales.

Après intégration on trouve:

$$x = \frac{C(2+t^2)^{3/2}}{(1+t^2)^{3/2}} \quad y = -\frac{C}{(1+t^2)^{3/2}} \quad x(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1} \quad y(t) = \frac{2t}{t^2+1}$$

