

1°. Montrer que l'équation $f(x) = 1 - \sin x - x = 0$ a une unique racine $\alpha \in]0,510; 0,511[=]a, b[$.

2°. $f''(x) > 0$ sur $[a, b]$ donc f est convexe sur $[a, b]$; illustrer cette propriété de f sur l'intervalle $[a, b]$; on peut ainsi obtenir un encadrement de α en appliquant la méthode de Newton et celle des parties proportionnelles à $[a, b]$. A partir de cette remarque encadrer α par des nombres à 5 décimales.

3°. Soit $g(x) = \log(x + \sin x)$ et $I = \int_{\alpha}^{1,5} g(x) dx$; $I_1 = \int_{\alpha}^{0,6} g(x) dx$; $I_2 = \int_{0,6}^{1,4} g(x) dx$ on a bien sûr $I = I_1 + I_2$.

a). Calcul de I_2 : appliquer la méthode des trapèzes en subdivisant $[0,6; 1,4]$ en 8 intervalles de même longueur pour obtenir une évaluation Σ de I_2 (on donnera de chaque terme $x + \sin x$ une évaluation à 5 décimales avec incertitude δ avec $\delta < 0,5 \times 10^{-5}$, donc, dans le calcul par des termes $\log(x + \sin x)$ par interpolation linéaire l'incertitude est de 2×10^{-5}). Pour obtenir un encadrement de I_2 par des nombres à 5 décimales, on utilisera la formule:

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \inf_{x \in [0,6; 1,4]} g''(x) < \frac{\Sigma - I_2}{\Sigma} < \frac{\sup_{x \in [0,6; 1,4]} g''(x)}{12n^2} \times \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

b). Donner un encadrement de I_1 puis un encadrement de I .

Rappel: méthode de Newton $u_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ (à appliquer de préférence là où $f(a)$ est le plus faible en valeur absolue).

- méthode des parties proportionnelles: $u_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \times f(a)$.

(même remarque).

$$\Sigma = \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2} (f(0,6) + f(1,4)) + f(0,7) + \dots + f(1,3) \right].$$