

1°)- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant i) ii) iii) :

- i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall a \in \mathbb{R} : f(x+a, y+a) = e^{-a} f(x,y)$
 ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, 2f(x,y) = f(x, \frac{x+y}{2}) + f(\frac{x+y}{2}, y)$
 iii) f est continue au point $(0,0)$.

a) Soit x un réel tel que $f(x, -x) \neq 0$, calculer $\frac{f(2x, -2x)}{f(x, -x)}$.

b) Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\varphi(x) = \cosh \frac{x}{2} \cdot \varphi(\frac{x}{2})$ pour tout x réel. (1)

Montrer que si φ est continue en 0 et si $\varphi(0) = 0$, alors φ est identiquement nulle. (On pourra majorer $\cosh \frac{x}{2}$ par $e^{x/2}$ si x est positif) En déduire que, si φ satisfait à (1) et est continue en 0, on a : $\varphi(x) = \frac{\sinh x}{x} \varphi(0)$.

c) Calculer f connaissant $f(0,0)$ et trouver toutes les fonctions vérifiant

(1) Montrer que ces fonctions vérifient aussi la condition $f(x,y) = f(y,x)$ quel que soit le point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

d) On suppose que $f(0,0) \neq 0$. Pour tout c réel, soit S_c la courbe d'équation $f(x,y) = c$. Quel est le nombre maximal de points d'intersection de S_c avec une droite du plan $\mathbb{R}^2$? (On pourra étudier les variations de $\log f(x,y)$ lorsque (x,y) décrit une droite du plan).

2°)- Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ satisfaisant aux conditions i, ii, iii, iv

- i) $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \forall s \in S_3 : g(x_{s1}, x_{s2}, x_{s3}) = g(x_1, x_2, x_3)$.
 ii) " , $\forall a \in \mathbb{R} : g(x_1+a, x_2+a, x_3+a) = e^{-a} g(x_1, x_2, x_3)$.
 iii) " , $2g(x_1, x_2, x_3) = g(\frac{x_2+x_1}{2}, x_2, x_3) + g(x_1, \frac{x_2+x_1}{2}, x_3)$.
 iv) g est continue en 0.

a) Montrer que, si l'on pose $\psi(x,y) = g(x,y,0)$ alors pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on a : $4\psi(2x, 2y) = (e^{-x} + e^{-y})\psi(x,y) + e^{-x}\psi(-x,y) + e^{-y}\psi(x,-y)$. (3)

b) En posant $A(x,y) = \sup\{|\psi(x,y)|, |\psi(-x,y)|, |\psi(x,-y)|, |\psi(-x,-y)|\}$ et $a = \sup\{|x|, |y|\}$ montrer l'inégalité $A(2x, 2y) \leq e^a A(x,y)$.

En déduire que si $g(0,0,0) = 0$ alors g est identiquement nulle.

c) Soit la fonction h définie par : $h(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
 Calculer $h'(0)$ le plus simplement possible.

d) Montrer que la fonction k définie par $k(x,y) = \begin{cases} \frac{h(x)-h(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ h'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$ vérifie (3) :

k est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

e) Trouver toutes les fonctions qui vérifient les conditions (2).

(d'après E.N.S. groupe B 1965)