

I. Soit E e.v. de dim 3 sur $\mathbb{C}$; $(a, b) \in \mathbb{C}^2$; $a^2 + b^2 = 1$ et (e_1, e_2, e_3) une base de E .

1°. On définit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ par: $f(e_1) = e_1$; $f(e_2) = ae_2 + be_3$; $f(e_3) = -be_2 + ae_3$.

a). Noyau et image de f ? Montrer que f est un isomorphisme.

b). Soit id_E l'application identique. Noyau et image de $f - \text{id}_E$.
Quels sont les vecteurs invariants de f ?

c). Montrer que, lorsque a et b varient (avec $a^2 + b^2 = 1$), f décrit un sous-groupe commutatif de $GL_{\mathbb{C}}(E)$.

2°. Soit $U = M(f, (e_1, e_2, e_3))$

a). Ecrire la matrice U ; calculer U^{-1} et ${}^t U$.

Soit $\mathcal{U} = \{U, a^2 + b^2 = 1\}$. Montrer que $\mathcal{U}$ est un sous-groupe commutatif de $GL_3(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices inversibles sur $\mathbb{C}$).

b). Soit $\mathcal{A} = \{A \in GL_3(\mathbb{C}) : {}^t A = A^{-1}\}$; calculer $|\det A|$.

Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{C})$ et que $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$.

3°. Soit:
$$M = \begin{pmatrix} b^2 + a^2 \cos t & a \sin t & ab(1 - \cos t) \\ -a \sin t & \cos t & b \sin t \\ ab(1 - \cos t) & -b \sin t & a^2 + b^2 \cos t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soit $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E)$ tel que: $M(g, (e_i)) = M$. On fait le changement de base: $e'_1 = be_1 + ae_3$; $e'_2 = e_2$; $e'_3 = -ae_1 + be_3$.

Calculer la matrice M' de g dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) ; montrer que $M' \in \mathcal{U}$.
(d'après école des textiles de Roubaix 1^{ère} année)

II. Soit $J \in M_3(\mathbb{C})$ avec: $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{A}$ le s.e.v. de $M_3(\mathbb{C})$ engendré par J^n pour $n \in \mathbb{N}$ ($J^0 = I_3$)

1°. Calculer J^2 , J^3 puis J^n (on se servira de la congruence modulo 6).

2°. a). Montrer que I_3 , J et J^2 engendrent $\mathcal{A}$.

b). Quelle est la dimension de $\mathcal{A}$?

3°. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-anneau commutatif unitaire de $M_3(\mathbb{C})$.

4°. a). Montrer que pour qu'une matrice X de $M_3(\mathbb{C})$ commute avec tout élément de $\mathcal{A}$, il faut et il suffit qu'elle commute avec J .