

b). Montrer que X commute avec les $\mathbb{C}P^k$ de $\mathcal{A}$ si et seulement si X appartient à $\mathcal{A}$.

5°. Soit $M = aI_3 + bJ + cJ^2 \in \mathcal{A}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

a). Montrer que si M est inversible, son inverse est un élément de $\mathcal{A}$ (si M^{-1} existe, M^{-1} commute avec les éléments de $\mathcal{A}$).

b). Montrer que M est inversible si il existe une relation entre a, b et c que l'on précisera.

c). Déterminer M^{-1} lorsque M est inversible.

6°. On pose : $E = \frac{1}{3}(I - J + J^2)$ et $\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{A}; EX = XE = X\}$.

a). i). Montrer que $\mathcal{B}$ est 1 s.e.v. de $\mathcal{A}$.

ii). $\dim \mathcal{B} = ?$

b). Calculer E^2 , puis E^n , $n \in \mathbb{N}$

c). Montrer que l'addition et la multiplication des matrices font de $\mathcal{B}$ un corps dont l'élément unité (pour x) est E .

(d'après MP1 Reims 1972.)
 $\Leftrightarrow$ DEUG 1^{ère} année

III. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$; on donne : $f_k(X) = X^k + \sum_{p=0}^{k-1} a_{k,p} X^p$.

Établir la relation :
$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & \dots & f_{n-1}(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & \dots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \left(= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \right)$$

 ↑
 relation que l'on ne demande pas d'établir.

En déduire un calcul du déterminant :

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \omega a_1 & \dots & \omega(n a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega a_{n+1} & \dots & \omega(n a_{n+1}) \end{vmatrix}$$

Idée du barème : I. (6 p^{ts}) : 1°. 2,5 ; 2°. 1,5 ; 3°. 2.

II. (9 p^{ts}) : 1°. 1 ; 2°. 0,5 ; 3°. 0,5 ; 4°. 2,5 ;
 5°. 2,5 ; 6°. 2.

III. (5 p^{ts})