

I. $\forall n \in \mathbb{N}$, soit $f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par: $f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t)^n e^{ix \cos t} dt$

- 1°/ a). Trouver une relation simple entre f_2 , f_1 et f_0 .
 b). En écrivant $(\cos t)^n = (\cos t)^{n-2} (1 - \sin^2 t)$ et à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation linéaire entre f_{n+1} , f_n , f_{n-1} et f_{n-2} ($n \geq 2$). En déduire $f_n(0)$.

2°/ a). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de Taylor à la fonction $e^{x \cos t}$, montrer que l'on peut écrire: $\forall x \in \mathbb{R}; \forall t \in [0, 2\pi]$:

$$e^{x \cos t} = e^{x_0 \cos t} + (x - x_0) \cos t \cdot e^{x_0 \cos t} + (x - x_0) \varepsilon(x, t)$$

où $\varepsilon(x, t)$ satisfait: $|\varepsilon(x, t)| \leq \frac{|x - x_0|}{2} e^{|x_0| + |x|}$

- b). En déduire que f_0 est dérivable; calculer f'_0 .
 c). Montrer alors que f_0 est indéfiniment dérivable; donner son développement limité à l'ordre n au voisinage de 0.

3°/ a). Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cosh(x \cos t) dt \quad \text{et} \quad f_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \sinh(x \cos t) dt.$$

En déduire des formules analogues pour f_n .

- b). Montrer, $\forall x \in \mathbb{R}^+$: $f_0(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \cosh(x \cos t) dt \geq \frac{2}{3} \cosh \frac{x}{2}$
 et $f_1(x) \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/3} \cos t \sinh(x \cos t) dt \geq \frac{1}{3} \sinh \frac{x}{2}$.

c). Étudier les variations, les branches infinies et tracer le graphe de f_0 .

NB: 1°/ 2°/ et 3°/ sont indépendants dans une large mesure.
 d'après M P I Rennes (72).

II - Primitives des fonctions:

$$f(x) = \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \sin 3x}.$$

$$h(x) = \int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx.$$